1 El vector de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia viene dado por:

$$\vec{r} = 3\,\vec{i} + 5\,\vec{j} \text{ m}$$

Determina sus coordenadas polares.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83\,\text{m} \\ \text{tg}\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \theta = \text{arctg}\dfrac{5}{3} = 59°\,2'\,10{,}5'' \end{cases}$$

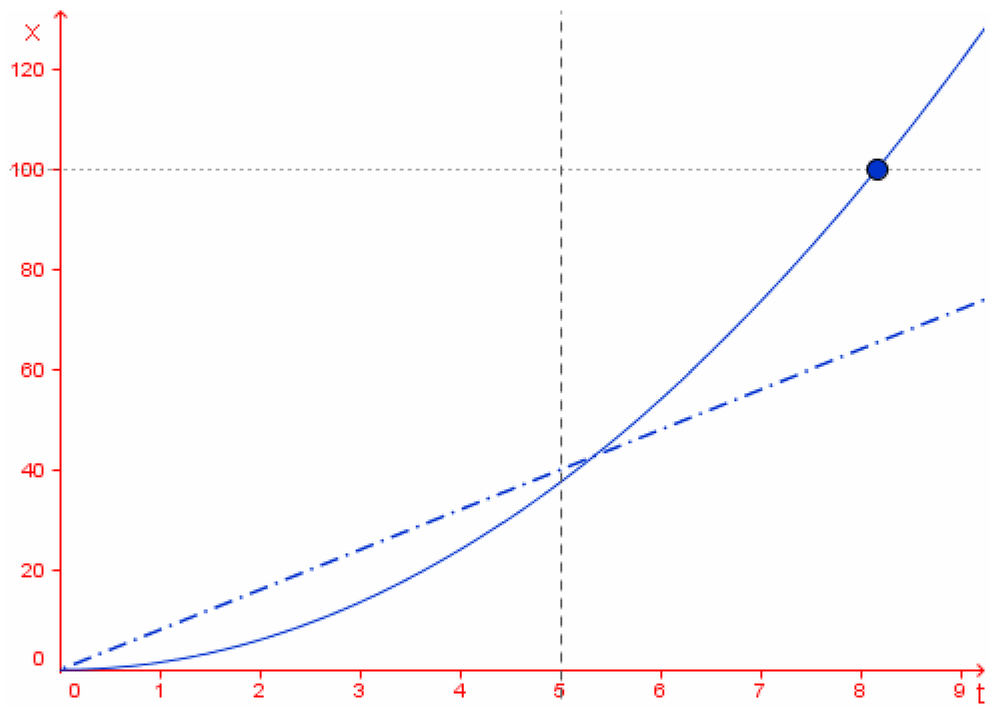
2 Las coordenadas polares de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia son: r = 10 θ = 30°. Determina el vector de posición del cuerpo con respecto a dicho punto.

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta = 10\cos 30° = 10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \\ y = r\,\text{sen}\theta = 10\cdot\dfrac{1}{2} = 5 \end{array} \right\} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$$

3 Dos cuerpos A y B se mueven en la dirección X según las ecuaciones $x_A = 8t$ y $x_B = 1{,}5t^2$.

a) Representa en una misma gráfica las posiciones de A y de B desde t = 0 s hasta t = 5 s.
b) ¿Quién llega antes a los 100 m?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran los dos en la misma posición?
d) ¿Quién alcanza antes los 300 m?
e) ¿Qué diferencias encuentras entre el movimiento de A y el de B?

a)



b) 100 = 8t ⇒ t = 100/8 = 12,5 s el A y $100 = 1{,}5t^2$ $t = \sqrt{\dfrac{100}{1.5}} = 8{,}16\text{ s}$ tarda el B que llega el primero.

c) Igualamos $x_A = x_B$, entonces:
$8t = 1{,}5t^2$; $1{,}5t^2 - 8t = 0$
$t(1{,}5t - 8) = 0$, luego t = 0 (coinciden a la salida) y
$t = \dfrac{8}{1{,}5} = 5{,}\hat{3}\text{ s}$

d) $x_A = 300 = 8t$, luego

$t = \frac{300}{8} = 37{,}5\,s$ tarada el A en recorrer los 300 m.

$x_B = 300 = 1{,}5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{300}{1{,}5}} = 14.14\,s$ tarda el B en llegar a los 300 m.

e) x_A es una ecuación de primer grado y proporcional a t luego su representación es una recta, sin embargo la x_B es de 2º grado, luego su representación es una parábola que crece más rápidamente, en la primera la velocidad sería constante v_A = 8 m/s y en la segunda depende del tiempo según v_B = 3t de forma lineal.

❂❂❂✱✱❃✱✱❂❂❂

4 ¿Podría ser mayor el desplazamiento que el espacio recorrido?

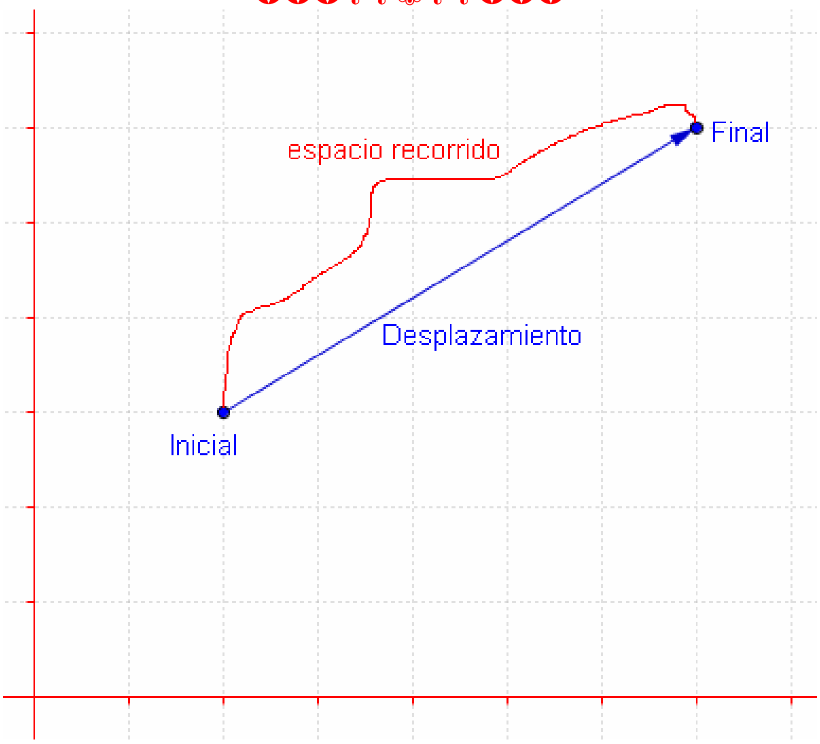
❂❂❂✱✱❃✱✱❂❂❂

Como el desplazamiento es el vector que une la posición inicial y la final, esa distancia será una línea recta y la línea recta es la distancia más corta entre dos posiciones, siempre el desplazamiento será menor o igual que el espacio recorrido.

❂❂❂✱✱❃✱✱❂❂❂

5 ¿Pueden ser equivalentes el espacio recorrido y el desplazamiento? ¿En qué caso?

❂❂❂✱✱❃✱✱❂❂❂

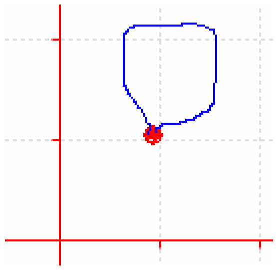


Desplazamiento: es el vector que une la posición inicial y la final
Espacio recorrido: es la distancia medida sobre la trayectoria entre la posición final y la inicial.

Solo serán equivalentes si la trayectoria es una línea recta.

❂❂❂✱✱❃✱✱❂❂❂

6 ¿Crees que un cuerpo podría haber recorrido un espacio si el desplazamiento es cero? (Revisa ahora tu respuesta a la cuestión previa número 4 del principio de la unidad.)



Se puede recorrer una trayectoria cerrada en que el punto inicial y el final coinciden con lo cual el desplazamiento sería nulo pero el espacio recorrido no.

7 Lee con atención las siguientes definiciones y expresa matemáticamente las cuatro magnitudes teniendo en cuenta lo que se acaba de explicar.

a) Aceleración es la rapidez con que cambia la velocidad.

b) Fuerza es la rapidez conque cambia el momento lineal $\vec{p}$ de un cuerpo.

c) Potencia (P) es la rapidez con que se realiza un trabajo (W).

d) Velocidad de una reacción es la rapidez con que cambia la concentración de un reactivo (c).

a) $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

b) $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

c) $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$.

d) $v = \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{dc}{dt}$.

8 Entre 1960 y 1980, la población de cierto país creció en 6842008 habitantes.
¿Cuál fue la rapidez de crecimiento de la población? ¿En qué unidades la expresarías?

$$\text{Crecimiento} = \frac{\text{Variación `población}}{\text{Tiempo}} = \frac{6842008}{20}\frac{\text{habitantes}}{\text{año}} = 342100{,}4\,\frac{\text{habitantes}}{\text{año}}$$

9 ¿Un cuerpo se desplaza en una recta según la ecuación:

$$\vec{r} = 5t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}\ \text{m}$$

¿Cuál ha sido su velocidad en los cinco primeros segundos?

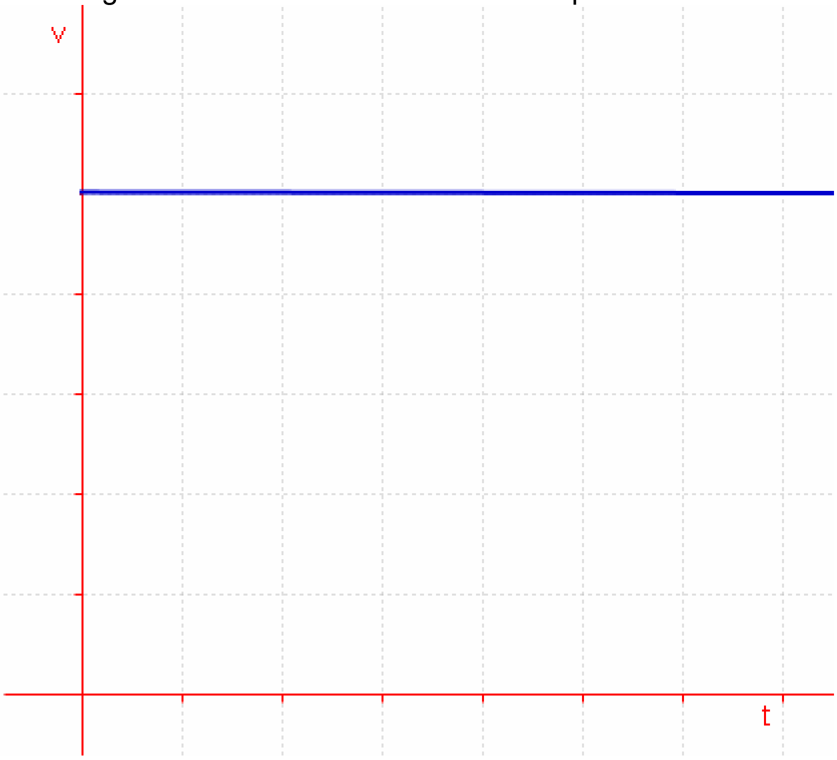
$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(5s) - \vec{r}(0s)}{5-0} = \frac{(5{\cdot}5\ \vec{i} + 2{\cdot}5\ \vec{j})}{5} = 5\ \vec{i} + 2\ \vec{j}\ \frac{m}{s} \text{ y su módulo } v = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}\ \frac{m}{s}$$

✪✪✪✼✼❁✼✼✪✪✪

10 ¿Qué clase de movimiento realiza un cuerpo que se mueve con velocidad constante? ¿Cómo crees que sería la representación gráfica de la velocidad frente al tiempo?

✪✪✪✼✼❁✼✼✪✪✪

Si la velocidad es constante, en módulo dirección y sentido, el movimiento es rectilíneo y uniforme. La representación grafica de la velocidad frente al tiempo sería una línea recta horizontal.



✪✪✪✼✼❁✼✼✪✪✪

11 Un cuerpo se mueve según la ecuación de posición: $\vec{r} = 5\ \vec{i} + (3t^2 - 1)\ \vec{j}$

a) ¿Qué desplazamiento ha realizado en los diez primeros segundos? ¿ En qué dirección se mueve?

b) Calcula cuál ha sido su velocidad en dicho intervalo de tiempo.

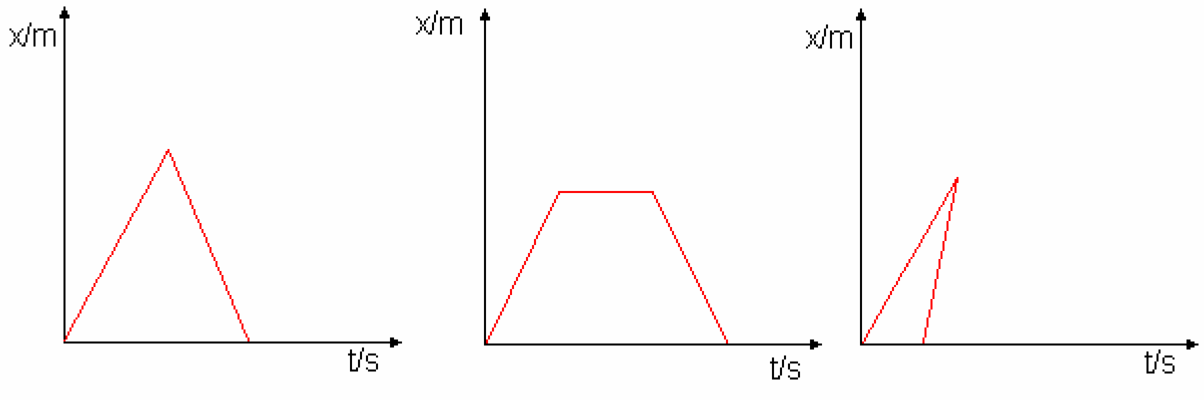
✪✪✪✼✼❁✼✼✪✪✪

a) $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t=10s) - \vec{r}(t=0s) = [5\ \vec{i} + (3{\cdot}10^2 - 1)\ \vec{j} - (5\ \vec{i} - \vec{j})] = 300\ \vec{j}\ m$

Se mueve según el sentido positivo del eje vertical.

b) $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{300\,\vec{j}}{10}\frac{m}{s} = 30\,\vec{j}\,\frac{m}{s}$.

12 Un cuerpo parte del reposo y, después de recorrer algunos metros, vuelve al punto de partida. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la descripción de este movimiento?



La primera, la tercera no puede ser pues el tiempo no puede volver hacia atrás y en la segunda hay un intervalo de tiempo en que se está parado antes de regresar al punto de partida.

13 Repite el procedimiento seguido en el ejemplo anterior eligiendo como intervalo de tiempo Δt = 0,000001 s. ¿A qué valor exacto crees que tiende la serie? Ése es el valor de la velocidad instantánea.

$x_f = x(t+\Delta t) = 3\cdot(2{,}000001)^2 - 4(2{,}000001) = 4{,}000008$ m
$x_0 = x(t) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 4$ m
$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4{,}000008\,m - 4\,m}{0{,}000001\,s} = 8\,\frac{m}{s}$ tiende a 8 m/s que es el valor de la velocidad instantánea.

14 Un cuerpo se mueve en una dirección determinada según la siguiente ecuación de posición:

$$\vec{r} = (4t^3 - t)\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}\ m$$

Calcula:

a) Su velocidad media en los diez primeros segundos.
b) Su velocidad instantánea en t = 5 s y en t = 10 s.

a) $\left.\begin{cases} \vec{r}(10) = (4\cdot 10^3 - 10)\,\vec{i} + 3\cdot 10^2\,\vec{j}\ m \\ \vec{r}(0) = 0\,m \end{cases}\right\} \Delta\vec{r} = \vec{r}(10) - \vec{r}(0) = 3990\,\vec{i} + 300\,\vec{j}\ m$ luego su velocidad media sería:

$$\vec v_m = \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{3990\,\vec i + 300\,\vec j\ m}{10\,s} = 399\,\vec i + 30\,\vec j\ \frac{m}{s} \Rightarrow v_m = \sqrt{399^2 + 30^2} = 400{,}13\,\frac{m}{s}$$

b) $$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(4t^3 - t)\,\vec i + 3t^2\,\vec j\right] = (12t^2 - 1)\,\vec i + 6t\,\vec j \Rightarrow \begin{cases} \vec v(5) = (12\cdot 5^2 - 1)\,\vec i + 6\cdot 5\,\vec j = 299\,\vec i + 30\,\vec j \\ \vec v(10) = (12\cdot 10^2 - 1)\,\vec i + 6\cdot 10\,\vec j = 1199\,\vec i + 60\,\vec j \end{cases}$$

sus módulos:

$$\begin{cases} v(5) = \sqrt{299^2 + 30^2} = 300{,}5\,\frac{m}{s} \\ v(10) = \sqrt{1199^2 + 60^2} = 1200{,}5\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

15 ¿Existe algún movimiento en el que la velocidad media y la instantánea sean iguales en todo momento? Si fuera así, di cuál.

En un movimiento rectilíneo de la forma $\vec r = kt + r_0$ m ya que:

$$\vec v_m = \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{\vec r(t_f) - \vec r(t_0)}{t_f - t_0} = \frac{kt_f + r_0 - kt_0 - r_0}{t_f - t_0} = \frac{k(t_f - t_0)}{t_f - t_0} = k\,\frac{m}{s} = \vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d(kt + r_0)}{dt} = k\,\frac{m}{s}$$

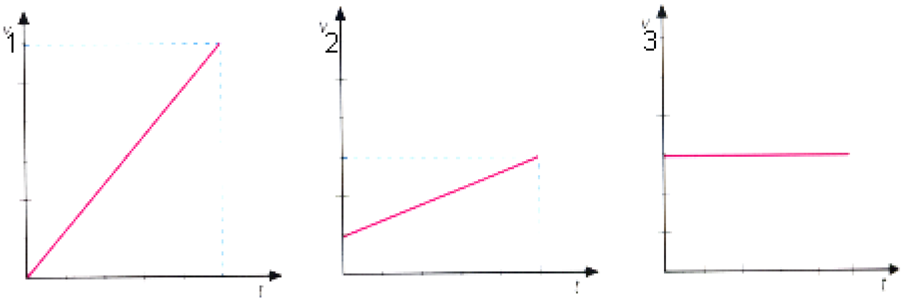
16 Un cuerpo se mueve según la ecuación $\vec r = (2t^2 + 5t)\,\vec i + t^3\,\vec j - 5t\,\vec k$ m. Escribe la ecuación de su velocidad instantánea en función del tiempo; después expresa dicha velocidad en t = 2 s y halla su valor en dicho instante.

$$\vec v(t) = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t^2 + 5t)\,\vec i + t^3\,\vec j - 5t\,\vec k\right] = (4t + 5)\,\vec i + 3t^2\,\vec j - 5\,\vec k\,\frac{m}{s}$$

$$\vec v(2) = (4\cdot 2 + 5)\,\vec i + 3\cdot 2^2\,\vec j - 5\,\vec k\,\frac{m}{s} = 13\,\vec i + 12\,\vec j - 5\,\vec k\,\frac{m}{s} \Rightarrow v(2) = \sqrt{13^2 + 12^2 + (-5)^2} = 18{,}34\,\frac{m}{s}$$

17 Las gráficas muestran la variación de la velocidad de tres cuerpos distintos en el mismo intervalo de tiempo.

a) ¿En cuál de los tres casos varía la velocidad más rápidamente?
b) ¿Qué ocurre en el caso del cuerpo de la segunda figura.
c) ¿Qué crees que representa la pendiente de la recta en cada caso?



a) La variación es más rápida en la gráfica que tiene mayor pendiente ya que la pendiente indica la variación de la variable dependiente (v) con la independiente (t):

$$\text{pendiente} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{aceleración}$$

La primera aumenta, en el tiempo t, 6 unidades de velocidad, la segunda, en ese mismo tiempo, aumenta 2 unidades de velocidad y la tercera mantiene su velocidad constante, luego es el móvil cuyo movimiento se describe en la primera gráfica el que varía más rápidamente su velocidad.

b) En el segundo caso el móvil tiene una velocidad inicial (velocidad cuando se empieza a contar el tiempo), de 1 unidad y aumenta su velocidad hasta 3 unidades (su aceleración media es de 2 unidades) en ese intervalo de tiempo, el movimiento es uniformemente acelerado.

c) Como ya hemos indicado la pendiente representa la variación de la velocidad con el tiempo, es decir la aceleración.

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

18 Determina por el procedimiento del ejercicio **13** la aceleración instantánea en el tiempo t = 3 cuando la velocidad de un cuerpo varía según la expresión: $v = 2t^2 + t$ m/s.

a) ¿Se diferencia ese valor de la aceleración media durante los tres primeros segundos?¿Por qué?

b) ¿ Qué dependencia del tiempo debería mostrar la ecuación para que ambos valores fuesen iguales?

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

Intervalo de tiempo = Δt = 0,000001 s

Velocidad en t = 3 s = v(t) = $2\cdot3^2$ + 3 m/s = 21 m/s.
Velocidad en t + Δt = 3,000001 s = v(t + Δt) = $2\cdot3{,}000001^2$ + 3,000001 m/s = 21,000013 m/s

Velocidad media en ese intervalo de tiempo pequeño:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{21{,}000013\,\frac{m}{s} - 21\,\frac{m}{s}}{0{,}000001\,s} = 13\,\frac{m}{s^2}$$

a) $a_m(t=3) = \frac{v(3) - v(0)}{\Delta t} = \frac{2\cdot3^2 + 3\,\frac{m}{s} - 0}{3\,s} = \frac{21}{3}\frac{m}{s^2} = 7\,\frac{m}{s^2}$. Sí hay diferencias pues el intervalo de tiempo en que se mide la aceleración media (Δt = 3 s) no es suficientemente pequeño, es decir calculamos la media de la velocidad en 3 s mientras que al principio es prácticamente la aceleración en un instante dado ya que el intervalo temporal es de una millonésima de segundo.

b) Para que los valores medio e instantáneo de la aceleración fuesen iguales la velocidad debería ser constante v = k m/s o tener una variación lineal del tipo $v(t) = Kt + v_0$:

$$\begin{cases} v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{k-k}{\Delta t} = 0\,\frac{m}{s^2} \\ v_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{(K(t+\Delta t) + v_0 - (K\cdot t - v_0)}{\Delta t} = \frac{K\Delta t}{\Delta t}\frac{m}{s^2} = K\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

En el primer caso la aceleración es nula y en el segundo constante. En realidad el primer caso es un caso particular del segundo cuando K = 0.

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

19 Determina la aceleración instantánea y la aceleración en t = 3 s de un cuerpo, si su ecuación de posición (en una dirección) es:

$$x = 2t + 3t^2 \text{ m}$$

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(2t+3t^2)\right) = \frac{d}{dt}(2+6t) = 6\frac{m}{s^2}$, en donde hemos derivado dos veces la ecuación de la posición.

$a(3) = 6$ m/s^2 ya que la aceleración no depende del tiempo (es constante).

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

20 ¿La posición de un cuerpo viene determinada por la ecuación:

$$\vec{r} = -3t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4t\,\vec{k} \text{ m}$$

a) Determina las componentes de sus aceleración. ¿Es esta constante?
b) Calcula el valor de la aceleración a los 2 s.

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

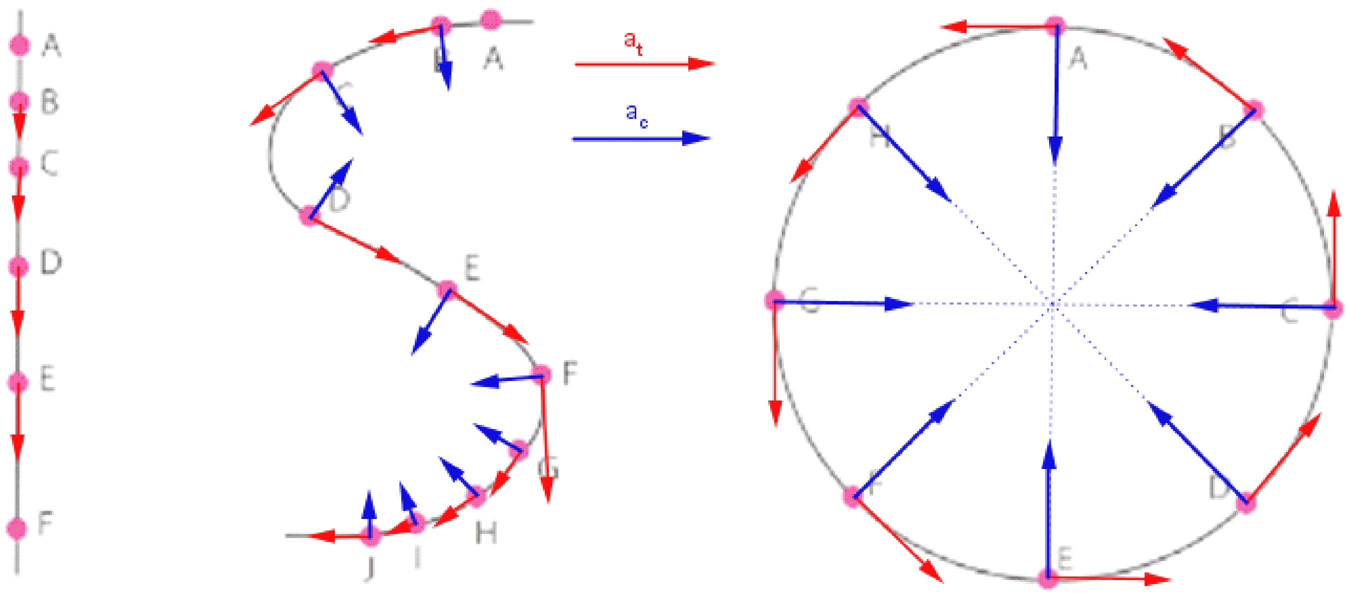
a) $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(-3t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(-6t\,\vec{i} + 6t^2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right) = -6\,\vec{i} + 12t\,\vec{j}\ \frac{m}{s^2}$

Luego las componentes de la aceleración son: $\begin{cases} a_x = -6\frac{m}{s^2} \\ a_y = 12t\frac{m}{s^2} \\ a_z = 0\frac{m}{s^2} \end{cases}$. La aceleración no es constante ya que depende del tiempo a través de su componente $a_y = 12t$ m/s^2, que depende del tiempo.

b) $\vec{a}(2) = -6\,\vec{i} + 12{\cdot}2\,\vec{j}\ \frac{m}{s^2} = -6\,\vec{i} + 24\,\vec{j}\ \frac{m}{s^2} \Rightarrow a(2) = \sqrt{(-6)^2 + 24^2} = \sqrt{612} = 24{,}74\frac{m}{s^2}$

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

21 Dibuja los vectores $\vec{a}_t$, y $\vec{a}_c$, (si ambos actúan) especificando su dirección y sentido en los siguientes movimientos (las posiciones se suponen fotografiadas y a intervalos de tiempo iguales):



Como no hay curvatura, el primer movimiento no tiene la componente centrípeta de la aceleración.

22 Razona la veracidad o falsedad de las conclusiones que se exponen de la siguiente proposición: si un objeto se mueve con valor de velocidad constante a lo largo de una trayectoria curvilínea, entonces:

a) Su velocidad es constante;

b) Su aceleración es nula;

c) Hay una contradicción manifiesta, pues no es compatible moverse con valor de velocidad constante con el hecho de que la trayectoria sea curvilínea.

a) Como la trayectoria es curvilínea **el módulo de la velocidad es constante**, la dirección y el sentido del vector velocidad no, ya que cambian en cada punto de la trayectoria, luego su velocidad no es constante.

b) Al variar la dirección y sentido de la velocidad, la aceleración (que es la variación de la velocidad con el tiempo) no puede ser nula.

c) Sí hay una contradicción manifiesta a menos que entendamos (como suele hacerse) que es el **módulo del vector velocidad el que permanece constante**.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

LA POSICIÓN DE LOS CUERPOS

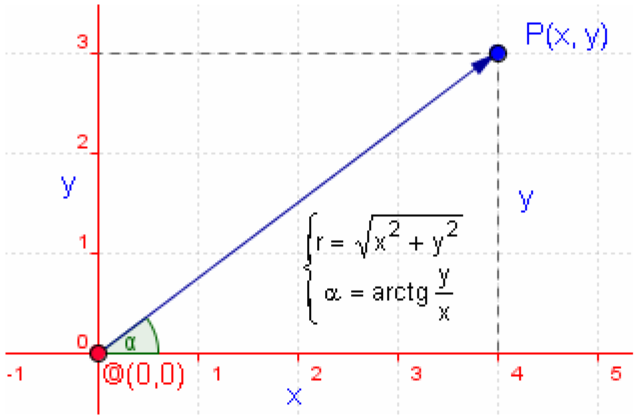
① ¿Qué tipo de coordenadas se usan para definir la posición de un cuerpo?

En el plano:

(1) Las **coordenadas cartesianas** del plano: dos ejes perpendiculares (vertical o de ordenadas y horizontal o de abscisas) que se cortan en un punto O (origen). Cada punto viene definido por dos coordenadas x (distancia del punto al eje vertical) e y (distancia del punto al eje horizontal).

(2) Coordenadas polares: Dos ejes perpendiculares y un origen O, cada punto del plano viene definido por la distancia del punto al origen r y el ángulo que forma con la horizontal θ

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

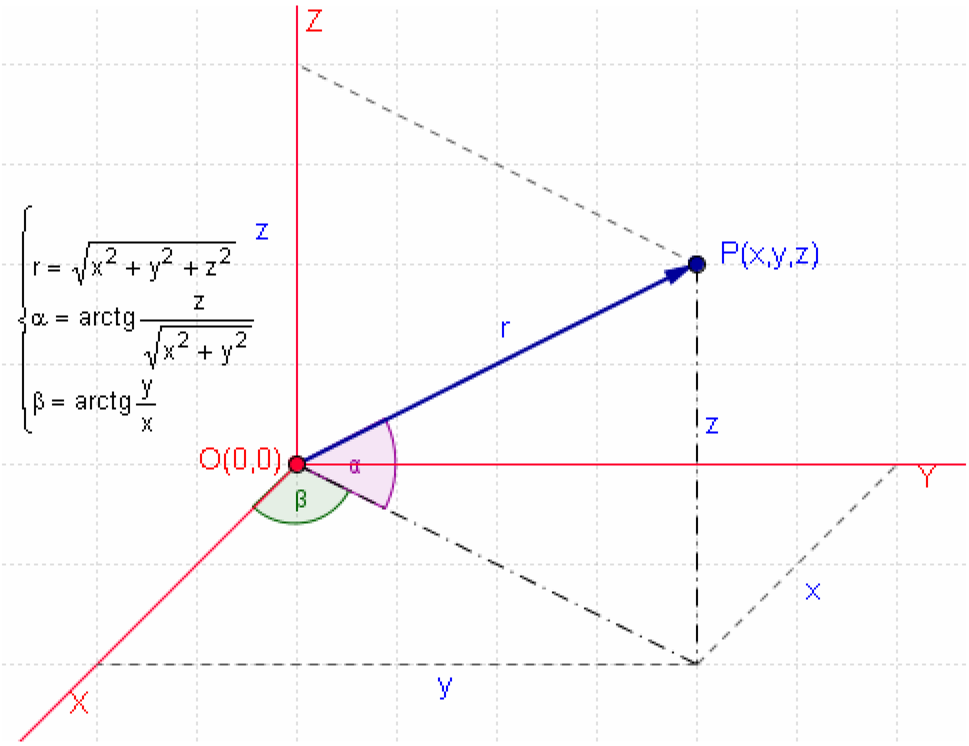


En el espacio

(1) Coordenadas cartesianas del espacio: Tres ejes perpendicular que coinciden en un punto O (origen) y tres coordenadas (x, y, z).

(2) Coordenadas esféricas: Los mismos tres ejes pero ahora cada punto de localiza por una distancia r y dos ángulos, α (que forma el vector de posición del punto con su proyección sobre el plano inferior) y β (que forma la citada proyección con alguno de los ejes que forman el plano inferior.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \beta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



② Explica cómo transformarías las coordenadas polares en cartesianas, y viceversa.

En el primer dibujo del ejercicio anterior podemos ver las relaciones:

De polares (r, α) a cartesianas (x, y): $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\alpha \end{cases}$ y viceversa: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$

③ ¿Qué diferencia hay entre desplazamiento y espacio recorrido?

Desplazamiento: es el vector que une la posición inicial y la final
Espacio recorrido: es la distancia medida sobre la trayectoria entre la posición final y la inicial.

Solo serán equivalentes si la trayectoria es una línea recta.

④ ¿Se puede determinar la trayectoria que ha seguido un cuerpo conociendo la posición inicial y la final al cabo de cierto tiempo?

Entre dos puntos (uno inicial y otro final) hay infinitas trayectorias, luego no puede saberse la trayectoria.

⑤ Un cuerpo describe un cuarto de circunferencia de radio 5 m desde A hacia B, como se aprecia en la figura, partiendo del punto A en el instante t = 0. Determina, considerando el origen en el centro:

a) El vector desplazamiento correspondiente al movimiento.
b) El módulo de dicho desplazamiento.
c) El espacio recorrido. ¿Coincide con el apartado **b)**? ¿Por qué?
d) Repite los tres apartados anteriores para el caso del movimiento desde A hasta C.

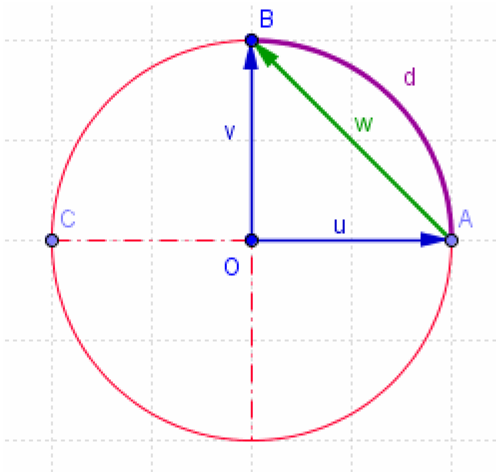
a) El vector desplazamiento es el vector $\vec{w} = -5\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ con origen en A y extremo en B.

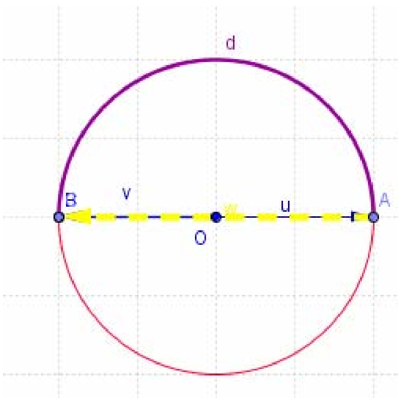
b) $w = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ m

c) El espacio recorrido es un cuarto de circunferencia, el arco d:

$$d = \frac{1}{4} 2\pi R = \frac{1}{2}\pi \cdot 5 = 7{,}85 \text{ m}$$

Este espacio no coincide con el apartado b) ya que al ser una circunferencia la cuerda (desplazamiento) no coincide con el arco (espacio recorrido).





d) Ahora el vector desplazamiento es $-10\,\vec{i}$, el desplazamiento son 10 m (el diámetro) y el espacio recorrido es media circunferencia π R = $\pi \cdot 5$ = 15,71 m