## LA VELOCIDAD DE LOS CUERPOS

⑥ La posición de un cuerpo cambia con el tiempo en las tres direcciones del espacio. ¿Cuántas componentes tiene el vector velocidad?

Como $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, el vector velocidad también tiene tres componentes según las tres direcciones de los ejes:

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

⑦ ¿Qué indica la velocidad media de un cuerpo? ¿Es ilustrativa del movimiento que ha seguido un cuerpo?

Es la relación o cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrer ese espacio, luego es como si el móvil hubiese recorrido ese espacio en el tiempo dado a la velocidad media. La velocidad media es, por tanto, una indicación del movimiento, pero no lo describe ya que el móvil puede haberse desplazado en distintos intervalos de tiempo a velocidades distintas que por término medio nos dan la calculada.

⑧ ¿Pueden ser iguales en todo momento la velocidad media y la instantánea en algún movimiento? ¿En qué caso?

Sólo cuando el móvil describe un movimiento rectilíneo y uniforme (con v = cte) la velocidad media y la instantánea coinciden en todo momento.

⑨ Si la aceleración tiene componentes tangencial y centrípeta, ¿por qué no se habla de las componentes tangencial y centrípeta de la velocidad?

Porque no tiene, ya que el vector desplazamiento es constante en un instante y punto determinados de su trayectoria.

①⓪ ¿Podría un cuerpo tener «celeridad» (módulo de velocidad) constante y velocidad variable?

Como la velocidad es un vector, el que su módulo sea constante (celeridad constante) no implica que haya de serlo su dirección y sentido, de hecho así ocurre en muchos movimientos físicos como el circular uniforme en que el móvil describe una circunferencia con celeridad constante pero la velocidad es variable ya que en cada punto la dirección y el sentido cambian.

**11** ¿Podría un cuerpo tener celeridad variable y velocidad constante?

Si la celeridad (módulo de la velocidad) es variable su velocidad también lo será, ya que al cambiar el módulo de un vector cambia el vector.

**12** ¿Crees que la velocidad media de un cuerpo en movimiento podría ser cero en cierto intervalo de tiempo?

Si un cuerpo que va en un sentido con una velocidad v cambia de sentido y se mueve con la misma celeridad volviendo al punto de partida, como el desplazamiento realizado ha sido nulo, la velocidad media es nula. Lo mismo ocurriría en cualquier trayectoria cerrada.

## LA ACELERACIÓN DE LOS CUERPOS

**13** ¿Cómo se definen la velocidad y la aceleración instantáneas? ¿Qué se entiende en Física por «instante»?

En términos físicos la **velocidad instantánea** se define como la velocidad media en el límite en que el intervalo de tiempo se hace casi cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

En términos físicos la **aceleración instantánea** se define como la aceleración media en el límite en que el intervalo de tiempo es prácticamente cero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

En física se entiende por «**instante**» : un intervalo de tiempo que tiende a cero.

**14** ¿Puede haber aceleración sin que cambie el valor de la velocidad? Razona tu respuesta.

Si la celeridad permanece constante pero la dirección y el sentido del vector velocidad varían, en un movimiento no rectilíneo, aparece una aceleración centrípeta.

⑮ Conocida la ecuación de posición de un cuerpo, ¿cómo calcularías la aceleración?

Derivando dos veces el vector posición:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

⑯ ¿Qué sentido físico tienen las componentes tangencial y centrípeta de la aceleración?

La componente tangencial de la aceleración va unida a la variación del módulo de la velocidad:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración centrípeta es producida por un cambio en la dirección y el sentido del vector velocidad:

$a_c = \frac{v^2}{r}$, v = velocidad, r = radio de curvatura.

⑰ Explica qué tipo de movimiento describiría un cuerpo si:

**a)** $\vec{a}_t$ es constante y $\vec{a}_c$ es cero.

**b)** $\vec{a}_c$ es constante y $\vec{a}_t$ es cero.

**c)** Ambas son cero.

**a)** Si la $\vec{a}_c$ es cero, el movimiento es **rectilíneo** y si $\vec{a}_t$ es constante es **uniformemente variado** (retardado si la aceleración constante es negativa y acelerado si la aceleración es positiva).

**b)** Si $\vec{a}_c$ es constante es porque el radio de la curvatura es constante, **movimiento circular**, y el módulo de la velocidad es constante, **uniforme**, y $\vec{a}_t$ es cero ya que el módulo de la velocidad permanece constante.

**c)** Si la $\vec{a}_c$ es cero, el movimiento es **rectilíneo** y si $\vec{a}_t$ también es nula, el módulo de la velocidad es constante, luego además es **uniforme.**

⑱ ¿Podría un cuerpo tener velocidad cero y, sin embargo, estar acelerado? Razona tu respuesta.

La aceleración es la variación de velocidad, y esta puede variar de un valor positivo o negativo a cero con lo que tendrá aceleración, es lo que sucede en un movimiento armónico simple (movimiento de péndulos de oscilaciones pequeñas, muelles, etc.), en los extremos del movimiento, la velocidad es nula (sino no sería un extremo) pero hay una aceleración de sentido contrario que le fuerza realizar otra oscilación.

**19** ¿Puede cambiar el sentido de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?

Si la constancia de la aceleración se refiere al módulo del vector aceleración, el sentido de la velocidad puede cambiar como sucede en el movimiento circular uniforme en que el módulo de la aceleración normal es constante y el de la velocidad también pero cambia, en cada punto la dirección y sentido del vector velocidad (tangente a la trayectoria en cada punto).

**20** ¿Puede cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?

Contestado en el ejercicio anterior.

**21** ¿Puede un cuerpo aumentar su velocidad si su aceleración disminuye?

Sí siempre que velocidad y aceleración sean de sentido contrario como ocurre en el movimiento armónico simple.

**22** ¿Podría un cuerpo moverse hacia la derecha si su aceleración se dirige hacia la izquierda?

Sí siempre que velocidad y aceleración sean de sentido contrario como ocurre en el movimiento armónico simple.

**23** ¿Qué tipo de movimiento describiría un objeto cuya aceleración fuese en todo momento perpendicular a la trayectoria y aumentase, además, de forma constante? ¿Y si la aceleración se mantuviese constante?

Describiría una espiral hacia el centro de la trayectoria. Si la aceleración fuese constante la trayectoria sería una circunferencia.

**②④** ¿Puede ser negativo el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?

Por definición el módulo de un vector es siempre positivo luego ni el módulo de la velocidad ni el módulo de la aceleración pueden ser negativos.

**②⑤** ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones se corresponderían con la de un cuerpo que se desplaza en una única dirección con aceleración constante? Razona tu respuesta:

**a)** $\vec{r} = \sqrt{2}t^2\,\vec{j}$
**b)** $x = -4t^3 + t$
**c)** $\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} + 10\,\vec{j}$
**d)** $y = 2t - 4t^2$

¿Qué forma tendrían las gráficas posición-tiempo en los casos elegidos? ¿Qué te sugiere?

Como la aceleración es la derivada segunda del desplazamiento respecto del tiempo, derivamos dos veces y comprobamos cual cumple el enunciado:

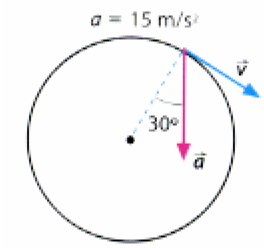
**a)** $\vec{r} = \sqrt{2}t^2\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}t^2\,\vec{j}\right) = 2\sqrt{2}t\,\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{2}t\,\vec{j}\right) = 2\sqrt{2}\,\vec{j}$ aceleración constante y positiva según el eje vertical.

**b)** $x = -4t^3 + t \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-4t^3 + t\right) = -12t^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-12t^2 + 1\right) = -24t$, la aceleración depende del tiempo, luego no es constante.

**c)** $\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} + 10\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t^2\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\right) = 6t\,\vec{i} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t\,\vec{i}\right) = 6\,\vec{i}$ aceleración constante y positiva según el eje horizontal.

**d)** $y = 2t - 4t^2 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t - 4t^2\right) = 2 - 8t \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2 - 8t) = -8$ aceleración constante y negativa según el eje vertical.

**②⑥** La siguiente figura representa la aceleración total, en un instante dado, de una partícula que describe círculos de 3 m de radio calcula en ese instante:




**a)** Su aceleración centrípeta.
**b)** El valor de su velocidad.
**c)** Su aceleración tangencial

**a)** $a_c = a \cdot \cos 30° = 15\frac{m}{s^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13\frac{m}{s^2}$.

**b)** Como $a_c = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{a_c \cdot R} = \sqrt{13\frac{m}{s^2} \cdot 3m} = 6{,}24\frac{m}{s}$.

**c)** $a_t = a sen 30° = 15\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5\frac{m}{s^2}$.

**27** Dado el vector velocidad:

$$\vec{v} = 3t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}$$

Calcula:

**a)** La aceleración tangencial.
**b)** La aceleración normal.
**c)** El radio de curvatura

**a)** $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(3t)^2 + (4t)^2}\right) = \frac{d}{dt}(5t) = 5\frac{m}{s^2}$.

**b)** Hallamos primero el vector aceleración: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}\right) = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ luego despejamos la aceleración normal de la fórmula: $a^2 = a_n^2 + a_t^2 \Leftrightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{25 - 25} = 0$

**c)** Como la aceleración normal es nula, el radio de curvatura es infinito es decir el movimiento es rectilíneo.

**28** Un cuerpo se mueve describiendo círculos de radio r con valor de velocidad v. Al cabo de cierto tiempo, se observa que tanto el valor de la velocidad como el radio se han duplicado. Razona si son ciertas o falsas las siguientes proposiciones:

**a)** Su aceleración centrípeta no ha cambiado.
**b)** Su aceleración centrípeta se ha duplicado.
**c)** Su aceleración centrípeta disminuye a la mitad.

Inicialmente: $\begin{cases} Radio = r \\ Velocidad = v \end{cases}$, al cabo de cierto tiempo: $\begin{cases} Radio = R = 2r \\ Velocidad = V = 2v \end{cases}$

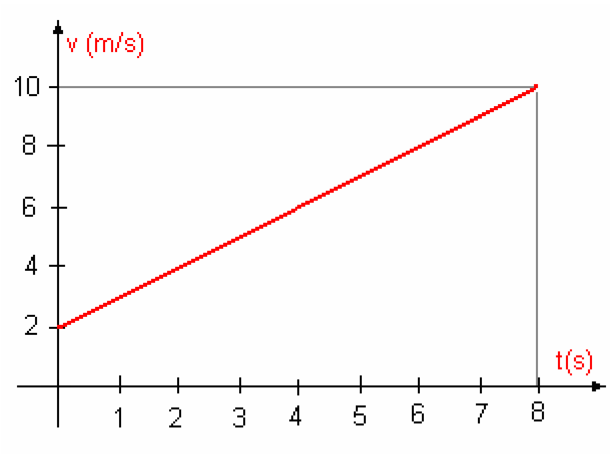
Como $a_c = a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{a_c^1}{a_c^2} = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{V^2}{R}} = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{(2v)^2}{2r}} = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{4v^2}{2r}} = \frac{\frac{v^2}{r}}{2\frac{v^2}{r}} = \frac{1}{2}$ es decir, la aceleración centrípeta se ha reducido a la mitad como dice el epígrafe **c)**.

## ANÁLISIS GRÁFICO DE MOVIMIENTOS

29 ¿Qué representa el área sombreada de la siguiente gráfica? ¿Qué tipo de movimiento representa? ¿Cuánto valdría su aceleración?


Como en la grafica se representa la velocidad frente al tiempo, el área sombreada que es el producto de la base (tiempo) por la altura (velocidad) es un espacio = e = v·t en un movimiento rectilíneo y uniforme. Como la velocidad permanece constante su aceleración es nula.

30 ¿Cuánto vale el desplazamiento efectuado en el movimiento cuya gráfica velocidad-tiempo se ofrece a continuación? ¿Cómo varía la velocidad? ¿Cómo sería la aceleración? ¿Cuánto valdría?




Velocidad inicial = $v_0$ = 2 m/s
Velocidad al cabo de los 8 s = v = 10 m/s.
Luego la velocidad varía de forma lineal según la expresión: $v = v_0 + at$.

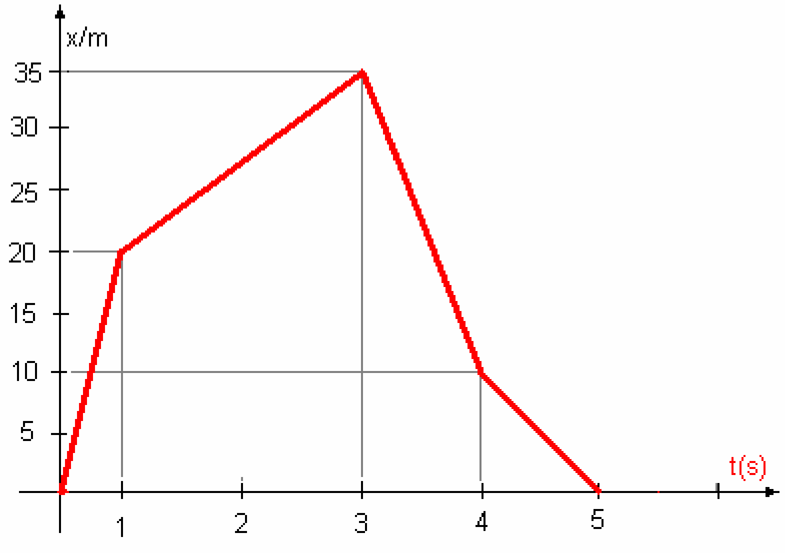
Como la gráfica de la velocidad es una línea recta creciente, de pendiente positiva constante, la aceleración es constante y se trata de un movimiento uniformemente acelerado:

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s}}{8s} = 1\frac{m}{s^2}$$

Luego v = 2 + 1t m/s (para t ≤ 8 s)

$e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 2{\cdot}8 + \frac{1}{2}1{\cdot}8^2\, m = 48$ m. que es el área del trapecio bajo la curva: $área = \frac{b+B}{2}{\cdot}h = \frac{2+8}{2}{\cdot}8 = 48$ m.

③① La siguiente gráfica muestra el desplazamiento en función del tiempo para un cuerpo que se mueve a lo largo del eje X. Halla las velocidades medias en los siguientes intervalos:




**a)** Entre 0 y 1 s.
**b)** Entre 0 y 4 s.
**c)** Entre 1 y 5 s.
**d)** Entre 0 y 5 s.

❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

**a)** $v_m = \dfrac{e(1)-e(0)}{\Delta t} = \dfrac{20-0}{1} = 20\dfrac{m}{s}$ .

**b)** $v_m = \dfrac{e(4)-e(0)}{\Delta t} = \dfrac{10-0}{4} = 2{,}5\dfrac{m}{s}$

**c)** $v_m = \dfrac{e(5)-e(1)}{\Delta t} = \dfrac{0-20}{4} = -5\dfrac{m}{s}$ .

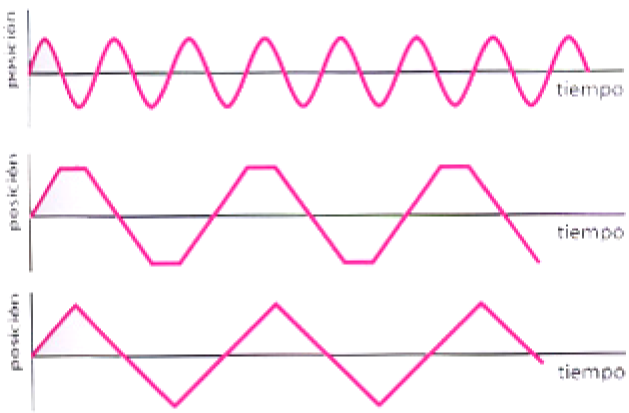
**d)** $v_m = \dfrac{e(5)-e(0)}{\Delta t} = \dfrac{0-0}{5} = 0\dfrac{m}{s}$

❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

③② Explica razonadamente qué gráfica posición-tiempo de las que se proponen describe adecuadamente el movimiento del péndulo de un reloj de cuco.

❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

El péndulo de un reloj describe un movimiento armónico simple que oscila entre dos posiciones extremas, con aceleración (y fuerza) proporcional y de sentido contrario a la separación respecto del reposo (posición de equilibrio) de manera que la aceleración y la elongación son máximas en sus extremos y mínimas en el centro y la v, al contrario, máxima en el centro y nula en los extremos. Estas variables vienen dadas por funciones trigonométricas (seno o coseno) luego la gráfica posición-tiempo que más se ajusta es la primera.




❂❂❂✽✽❀✽✽❂❂❂

## ANÁLISIS NUMÉRICO DE MOVIMIENTOS

**33** La ecuación de posición de un móvil viene dada por:

$$\vec{r} = 4t^2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}\ \text{m}$$

Razona y calcula:

- **a)** ¿En qué dirección se mueve?
- **b)** ¿Cuánto se ha desplazado en los 10 primeros segundos?
- **c)** ¿Cuál ha sido su velocidad media en esos 10 s?
- **d)** ¿Qué velocidad lleva a los 10 s?
- **e)** ¿Cuánto vale su aceleración? ¿Qué tipo de movimiento lleva?

**a)** Según la curva, en paramétricas,: $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$

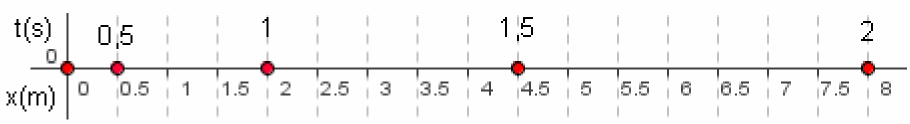
**b)** $\Delta\vec{r} = \vec{r}(10) - \vec{r}(0) = (4{\cdot}10^2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}) - (4{\cdot}0^2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}) = 400\,\vec{i}$ m, 400 m según el eje OX.

**c)** $v_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{400\,\vec{i}}{10s} = 40\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s}$

**d)** Ahora se trata de la velocidad instantánea $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(4t^2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}\right) = 8t\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s}$, luego la velocidad instantánea a los 10 s es: $\vec{v}(10) = 8{\cdot}10\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s} = 80\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s}$

**e)** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(8t\,\vec{i}\right) = 8\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s^2}$. Como la aceleración es constante y positiva, el movimiento es uniformemente acelerado.

**34** La siguiente figura muestra las posiciones que ocupa una bola en movimiento.




A partir de ella, deduce:

- **a)** La ecuación de posición en función del tiempo.
- **b)** La velocidad media en el intervalo de tiempo considerado.
- **c)** La velocidad instantánea en los tiempos señalados.
- **d)** La aceleración de la bola.
- **e)** ¿Qué velocidad llevará al cabo de 5 s?

**a)** Ponemos en una tabla los valores del espacio recorrido (x) frente al tiempo (t):

| t(s) | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| x(m) | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |

Luego la variación es de segundo grado de la forma $x(t) = 2\cdot t^2$ (m).

**b)** $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8-0}{2-0} = 4\frac{m}{s}$.

**c)** Hallamos la expresión de la velocidad instantánea, derivando el espacio y después sustituimos el tiempo por sus valores:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t^2)}{dt} = 4t\frac{m}{s} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0\ m/s \\ v(0{,}5) = 2\ m/s \\ v(1) = 4\ m/s \\ v(1{,}5) = 6\ m/s \\ v(2) = 8\ m/s \end{cases}$$

**d)** La aceleración se calcula derivando la velocidad:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4\frac{m}{s^2}$$

La aceleración no depende del tiempo, es constante.

**e)** Como v(t) = 4t m/s, v(5 s) = 4·5 m/s = 20 m/s.

**35** La siguiente tabla muestra las coordenadas x, y, z(en metros) de una partícula en función del tiempo (en segundos):

| (m) \ t(s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| y | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| z | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |

**a)** Determina su vector de posición en función del tiempo.
**b)** ¿Cuál es el vector desplazamiento correspondiente a los 5 s?
**c)** ¿Cuántos metros ha recorrido en esos 5 s?
**d)** Representa las gráficas v-t y a-t en ese intervalo de tiempo.

**a)** La fila de la x es constante, no depende de t, **x** = 2. La y se duplica para cada valor de t, luego **y** = 2·t y en la **z**, cada valor de t está elevado al cuadrado:

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

**b)** $\vec{r}(5) = 2\vec{i} + 2\cdot 5\vec{j} + 5^2\vec{k} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 25\vec{k}$ como puede verse también en la última columna de la tabla.

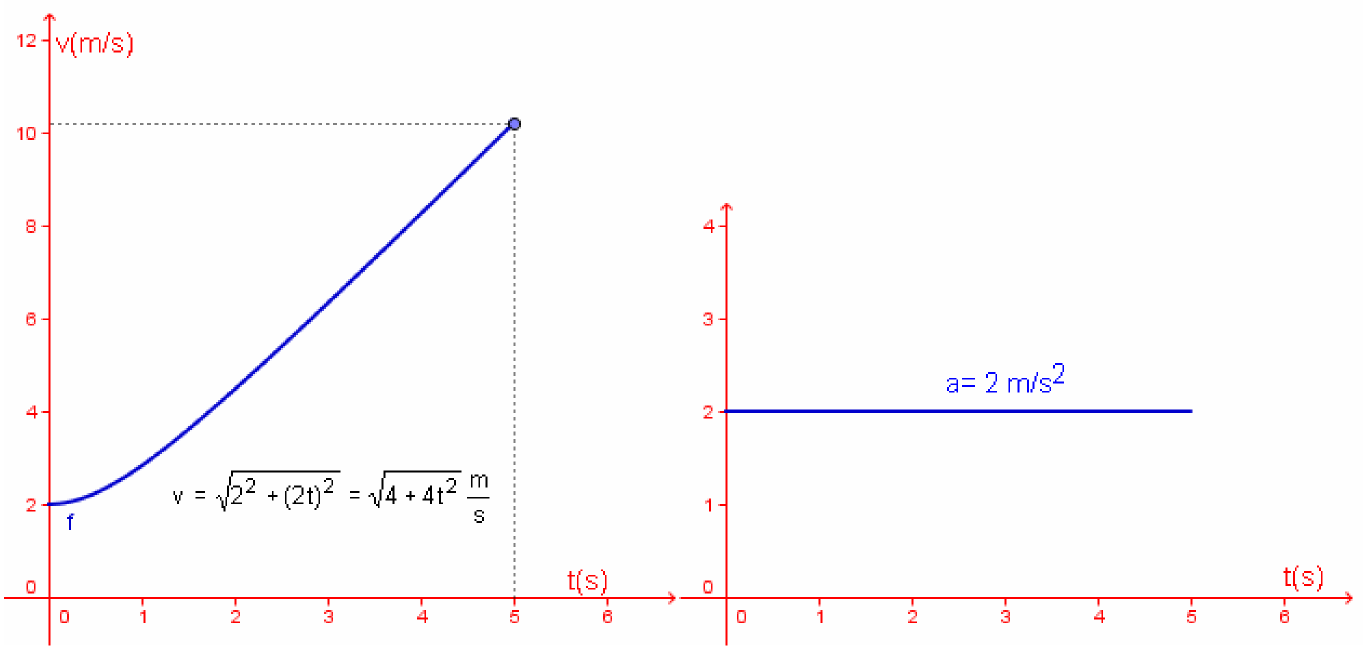
**c)** El espacio es la distancia recorrida sobre la trayectoria entre las posiciones inicial y final:

$$e = \Delta r = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}(5) - \vec{r}(0)| = |2\vec{i} + 10\vec{j} + 25\vec{k} - 2\vec{i}| = |10\vec{j} + 25\vec{k}| = \sqrt{10^2 + 25^2} = \sqrt{725} = 26{,}93\ m.$$

**d)** Primero hallamos la velocidad y la aceleración con las derivadas primera y segunda del desplazamiento respectivamente y después sus módulos:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\right) = 2\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}\ \dfrac{m}{s} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2}\ \dfrac{m}{s} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}\right) = 2\,\vec{k}\ \dfrac{m}{s^2} \Rightarrow a = 2\dfrac{m}{s^2} \end{cases}$$

Las representaciones entre 0 y 5 son




❂❂❂✻✻❀✻✻❂❂❂

**③⑥** La ecuación de movimiento de cierto cuerpo en el plano XY viene dada por la ecuación: $\vec{r} = 4\cos 3t\,\vec{i} + 4\,\text{sen}\,3t\,\vec{j}$ m (t en segundos).

**a)** Demuestra que la trayectoria de dicha partícula es una circunferencia centrada en el origen (0, 0) de radio 4 m.

**b)** Determina los vectores velocidad y aceleración.

**c)** Demuestra que el vector aceleración siempre apunta hacia el centro (es opuesto a $\vec{r}$).

**d)** Demuestra que el módulo de dicha aceleración cumple la igualdad $|\vec{a}| = \dfrac{|\vec{v}|^2}{r}$.

❂❂❂✻✻❀✻✻❂❂❂

**a)** Como $\vec{r} = 4\cos 3t\,\vec{i} + 4\,\text{sen}\,3t\,\vec{j}$ m, x = 4cos3t e y = 4sen3t, luego $x^2 + y^2 = (4\cos 3t)^2 + (4\,\text{sen}3t)^2 = 16\cos^2 3t + 16\,\text{sen}^2 3t = 16(\cos^2 3t + \text{sen}^2 3t) = 16$, luego $x^2 + y^2 = 16 = 4^2$ que es la ecuación reducida (centro en el origen) de una circunferencia de radio 4 m.

**b)**
$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(4\cos 3t\,\vec{i} + 4\text{sen}3t\,\vec{j}\right) = -12\text{sen}3t\,\vec{i} + 12\cos 3t\,\vec{j} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-12\text{sen}3t\,\vec{i} + 12\cos 3t\,\vec{j}\right) = -36\cos 3t\,\vec{i} - 36\text{sen}3t\,\vec{j} \end{cases}$$

**c)** $\vec{a} = -36\cos 3t\,\vec{i} - 36\,\text{sen}3t\,\vec{j} = -9\left(4\cos 3t\,\vec{i} + 4\,\text{sen}3t\,\vec{j}\right) = -9\,\vec{r}$ luego la aceleración tiene sentido contrario que el desplazamiento.

**d)**
$$\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{(-36\cos 3t)^2 + (-36\,\text{sen}3t)^2} = \sqrt{36^2(\cos^2 3t + \text{sen}^2 3t)} = \sqrt{36^2} = 36\,\dfrac{m}{s^2} \\ \dfrac{|\vec{v}|^2}{r} = \dfrac{\left(\sqrt{(-12\cos 3t)^2 + (12\,\text{sen}3t)^2}\right)^2}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{12^2[(\cos 3t)^2 + (\text{sen}3t)^2]}\right)^2}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{12^2}\right)^2}{4} = \dfrac{12^2}{4} = \dfrac{144}{4} = 36\,\dfrac{m}{s^2} \end{cases}$$