14 Representa la curva $y = \frac{2}{x^2+1}$ calculando sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Para representar una función estudiamos los siguientes apartados :

1 *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador y $x^2 + 1$ no se anula sólo tiene raíces complejas, luego dominio = $\mathcal{R}$.

2 *Asíntotas*

- Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función $\pm\infty$.
- Horizontal : $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{\infty} = 0$; A.H. en y =0
- Oblicua : No tiene pues tiene horizontal.

3 *Cortes con los ejes*:

- Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0) No corta pues no se anula
- Eje vertical o de ordenadas (x = 0), f(0) = 2, luego es el (0,2).

4 *Simetrías*

$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2+1} = \frac{2}{x^2+1} = f(x)$, luego tiene simetría par, respecto del eje vertical (OY).

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$

☒ La derivada primera se anula para x = 0

☒ Los intervalos de signo constante son los x < 0 en donde la derivada primera es > 0 y por tanto la función es creciente y los x > 0 en donde la derivada primera es < 0, negativa, luego la función decreciente, luego en x = 0 hay un máximo relativo

6 *Concavidad e inflexiones*

La derivada segunda es $f''(x) = \frac{-4(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(x^2+1)+16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}$ que se anula para $12x^2 - 4 = 0$, x = ±1,73. Los intervalos de signo constante son pues :

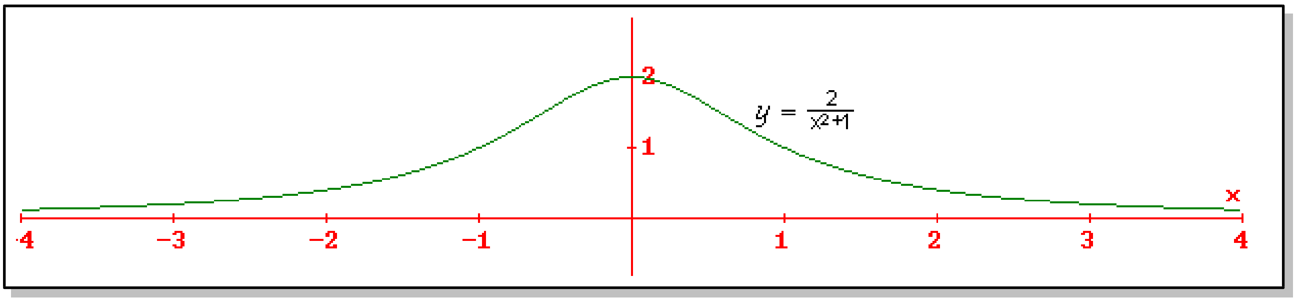
(-∞, -1,73), en donde f " > 0 y la función cóncava hacia arriba.
(-1,73 , 1,73) en donde f " < 0 y la función cóncava hacia abajo.
(1,73,∞), en donde f " > 0 y la función cóncava hacia arriba.

En x = ±1,73 hay sendos puntos de inflexión ya que la segunda derivada cambia de signo y la función de concavidad.

7 *Tabla resumen*

x	- ∞	(-∞ ,-1,73)	-1,73	(-1,73 , 0)	0	(0 , 1,73)	1,73	(1,73 ,+∞)	+ ∞
y	→0,A.H.	> 0	P.I	> 0	2,PC	>0	P.I.	> 0	→0,A.H.
f '(x)		> 0			0	< 0			
f(x)		↗			Máx	↘			
f "(x)		> 0	0	< 0			0	> 0	
f(x)		∪	P.I.	∩			P.I.	∪	

8 *Representación*



15 *Representa la función $y = \left| x^2 - 7x + 10 \right|$ e indica qué punto no es derivable.*

Es una función a trozos que como hemos dicho en otras ocasiones conviene representar la parábola y luego trasladar la parte que quede por debajo del eje horizontal (negativa a la parte superior .

$y = x^2 - 7x + 10$

1 *Dominio*

Como es una función polinómica de segundo grado, su dominio es $\mathcal{R}$, (- ∞ , +∞)

2 *Asíntotas*

- Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función ±∞
- Horizontal : No tiene pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = (\pm\infty)^2 = +\infty$

O Oblicua : Tampoco tiene ya que es de segundo grado.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0)

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}, (2, 0) \text{ y } (5, 0)$$

⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0)

f(0) = 10, luego es el punto (0,10).

4 *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x) = (-x)^2 - 7(-x) + 10 = x^2 + 7x + 10 \neq \pm f(x)$

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera f '(x) = 2x - 7

☒ Valores que anulan la derivada primera 2x - 7 = 0 ; x = 7/2 = 3,5

☒ Derivada segunda f "(x) = 2 , f "(3,5) = 2 > 0, luego tiene un mínimo en x = 3,5 y f (3,5) = - 2,25.

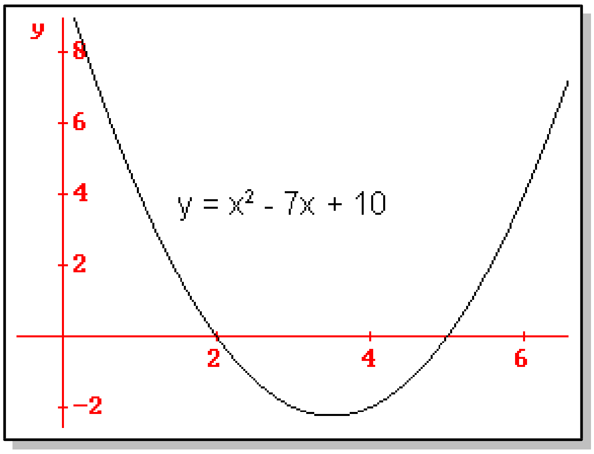
6 *Concavidad e inflexiones*

Como la derivada segunda f "(x) = 2 > 0 , la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

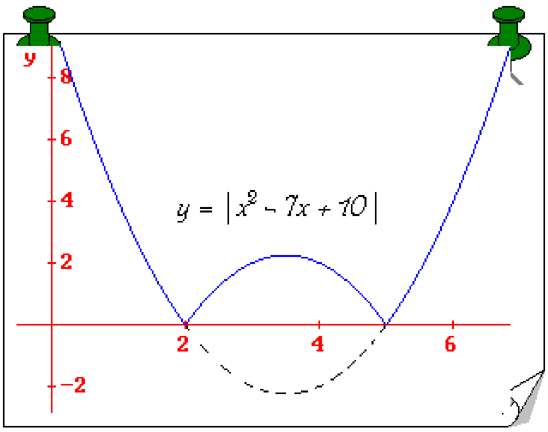
7 *Tabla resumen*

x	- ∞	(-∞ , 2)	2	(2 ,3,5)	3,5	(3,5 ,5)	5	(5 ,+∞)	+ ∞
y	→+∞	> 0	**0, PC**	< 0	-2,25	< 0	0,PC	> 0	→+∞
Monotonía y máximos y mínimos									
f '(x)		< 0			0	> 0			
f(x)		⇘			Mín	⇗			
Curvatura y Puntos de inflexión									
f "(x)		= 2 > 0							
f(x)		∪							

8 *Representación*



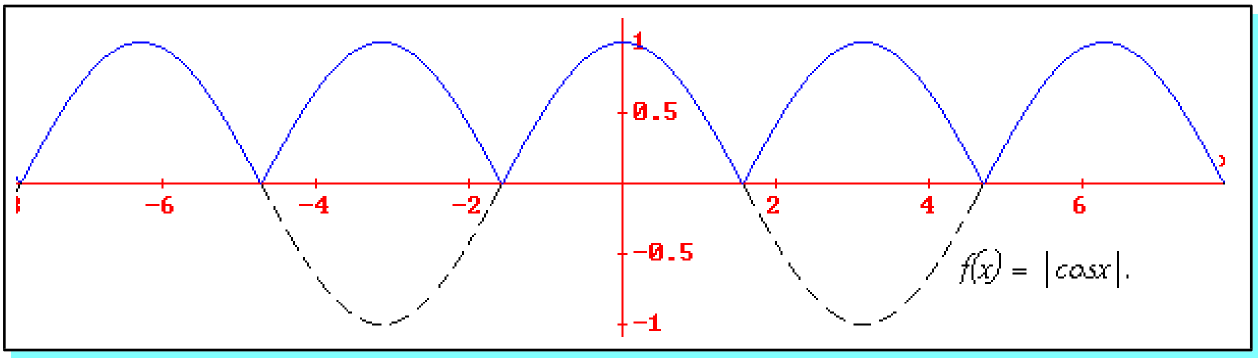
Si ahora trasladamos la parte negativa por encima del eje horizontal :



vemos que en los puntos de corte con el eje horizontal tiene dos puntos angulosos, luego no es derivable en x = 2 y en x = 5 ya que las derivadas laterales no son iguales (se observa distinto signo en las pendientes de las rectas tangentes a los lados de los dos puntos de corte.

16 *Esboza la gráfica de* $f(x) = |\cos x|$.

La función coseno es una función periódica sobradamente conocida, para representar su valor absoluto la parte negativa de la función (línea discontinua) la pasamos por encima del eje horizontal :



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

17 *Representa esquemáticamente la gráfica de $y = \frac{e^x}{x}$ determinando para ello sus extremos relativos, si los tiene, intervalos de crecimiento o decrecimiento, límites, etc.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Para representar una función estudiamos los siguientes apartados :

1 *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador : x = 0, luego dominio = $\mathcal{R} - \{0\}$.

2 *Asíntotas*

- Verticales : Comprobamos que para cuando x tiende a 0 la función tiende a ±∞ :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ luego tiene una A.V. en } x = 0$$

- Horizontal : $y = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$; A.H por la izquierda. en y =0.

- Oblicua : No tiene pues tiene horizontal.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0), no tiene pues no se anula par ningún valor de su dominio.

⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0). No pertenece al dominio

4 *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x} \neq \pm f(x)$

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

☒ La derivada primera se anula para x - 1 = 0 , x = 1

☒ Los intervalos de signo constante los forman la discontinuidad x = 0 y el valor que anula la derivada primera x = 1:

(-∞ , 0) en donde la derivada primera es < 0 y por tanto la función es decreciente.

(0,1) en donde la derivada primera también es negativa, luego la función decreciente.

(1,+∞) en donde la derivada primera es positiva, luego la función creciente.

Por tanto tiene un mínimo en x = 1, ya que pasa de ser decreciente a la izquierda a creciente a la derecha y se anula la primera derivada, f(1) = e.

6 *Concavidad e inflexiones*

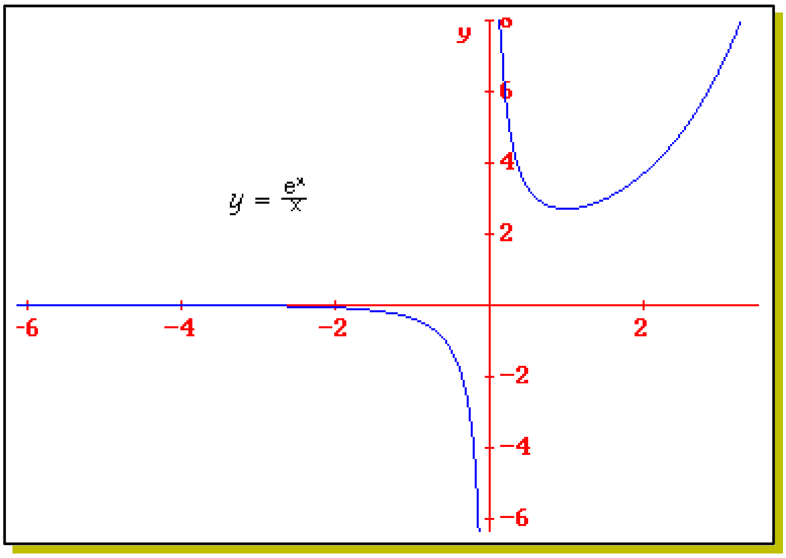
La derivada segunda es $f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$ que tampoco se hace cero para ningún valor, luego los intervalos de signo constante los forma la discontinuidad x = 0 y son :

(-∞ , 0) en donde la segunda derivada es < 0 y por tanto función cóncava hacia abajo y (0, +∞) en donde la derivada segunda es positiva y la función es cóncava hacia arriba.

7 *Tabla resumen*

x	- ∞	(-∞ , 0)	0	(0 ,1)	1	(1 ,+∞)	+ ∞
y	→0,A.H.	< 0	∞,A.V.	> 0	e	> 0	→ +∞.
f '(x)		< 0		< 0	0	> 0	
f(x)		↘		↘	Mín	↗	
f "(x)		< 0		> 0			
f(x)		∩		∪			

8 *Representación*



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

En los Ejercicios 18-22 representa gráficamente cada par de funciones. Comienza representando la primera e intenta adivinar, a la vista de ella, cómo será la segunda. Comprueba a continuación tu conjetura.

Antes de hacer estos ejercicios es conveniente que recuerdes un poco de teoría :

① FUNCIONES SIMÉTRICAS RESPECTO DE UN EJE VERTICAL

Una función es simétrica respecto a un eje x = a, **si f(a - h) = f(a +h)**

Un caso particular es la simetría respecto del eje vertical, x = 0 en que **f(-x) = f(x)**

② FUNCIONES SIMÉTRICAS RESPECTO AL UN PUNTO P(A,B)

Para que una función **f(x)** tenga al punto P como centro de simetría ha de cumplir **f(a - h) + f(a + h) = 2b.**

Un caso especial es si el centro de simetría es el origen **O(0,0)**, entonces **f(-x) = - f(x).**

③ TRASLACIÓN VERTICAL

Para trasladar uno función f(x) verticalmente **b** unidades, hacemos **f(x) + b**, si **b** es **positivo** la traslación es **hacia arriba** y **hacia abajo** si **b** es **negativo**.

④ TRASLACIÓN HORIZONTAL

Para trasladar una función f(x) a unidades a derecha o izquierda se **sustituye** la **x** por **x+a**, es decir **f(x + a)**, si **a < 0** la traslación es hacia la **derecha** y hacia la **izquierda** si **a > 0**.

⑤ TRASLACIÓN OBLICUA

Composición de traslaciones verticales y horizontales: **f(x+a) + b**

⑥ CONTRACCIÓN Y ESTIRAMIENTO VERTICALES

Si a una función f(x) se le multiplica por una constante k. la función **kf(x)** se **estira** si **k > 1** y se **contrae** o **encoge** verticalmente si **0 < k < 1**

⑦ CONTRACCIÓNSY ESTIRAMIENTO HORIZONTALES

Si en una función f(x) se **sustituye** la variable **x** por **kx**. la función **f(kx)** se **estira** si **0 < k < 1** y se **contrae** o encoge horizontalmente si **k > 1**

⑧ FUNCIÓN OPUESTA

Si a una función se le **cambia** de **signo** equivale a un **giro** de **180°** alrededor del **eje horizontal** .

18 a) $f(x) = \frac{x+2}{3x-3}$ b) $f(x) = \frac{x-2}{3x+3}$

◈◈◈▣▣◉▣▣◈◈◈

a) $f(x) = \frac{x+2}{3x-3}$

1 *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador : 3x - 3 = 0, x = 3/3 =1, luego dominio = $\mathcal{R}-\{1\}$.

2 *Asíntotas*

O Verticales : Comprobamos que para cuando x tiende a 1 la función tiende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+2}{3x-3}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{3x-3}=+\infty, \text{ luego tiene una A.V. en } x = 1$$

O Horizontal : $y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{3x-3}=\frac{1}{3}$; A.H en y = 1/3.

O Oblicua : No tiene pues tiene horizontal.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0), x + 2 = 0, x = -2 , punto (-2, 0) .

⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0). f(0) = - 2/3, punto (0, -2/3)

4 *Simetrías*

No tiene ya que $f(-x)=\frac{-x+2}{3(-x)-3}=\frac{-x+2}{-3x-3}\neq\pm f(x)$

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x)=\frac{3x-3-3(x+2)}{(3x-3)^2}=\frac{-9}{(3x-3)^2}$
☒ La derivada primera no se anula para ningún valor ya que - 9≠ 0
☒ Los intervalos de signo constante lo forma la discontinuidad x = 1:

(-∞ , 1) en donde la derivada primera es < 0 y por tanto la función es decreciente.

(1,+∞) en donde la derivada primera es negativa, luego la función decreciente.

Por tanto no tiene máximos ni mínimos.

6 *Concavidad e inflexiones*

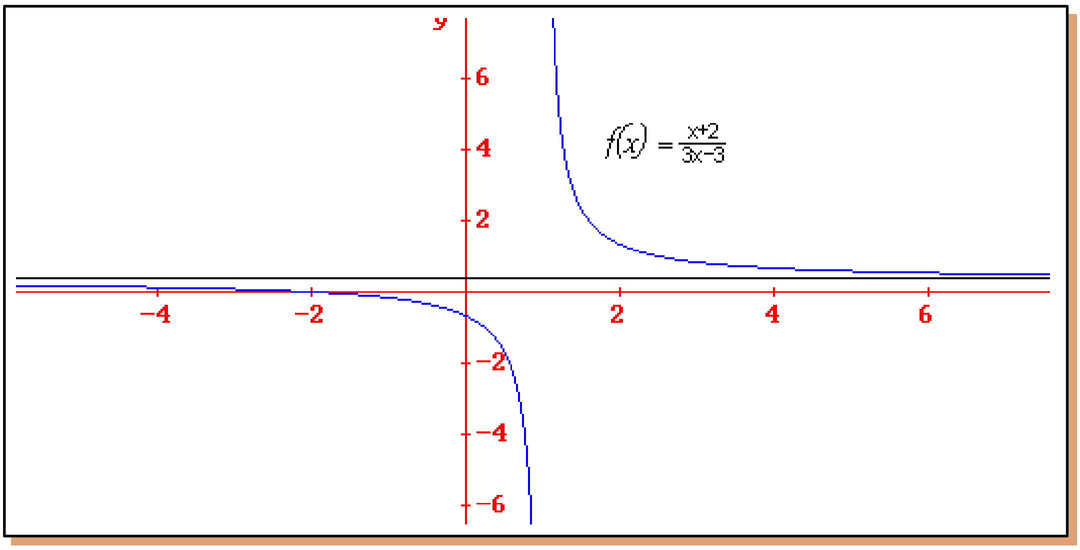
La derivada segunda es $f''(x)=\frac{64}{(3x-3)^3}$ que tampoco se hace cero para ningún valor, luego los intervalos de signo constante los forma la discontinuidad x = 1 y son :

(-∞ , 1) en donde la segunda derivada es < 0 y por tanto función cóncava hacia abajo y (1, +∞) en donde la derivada segunda es positiva y la función es cóncava hacia arriba.

7 *Tabla resumen*

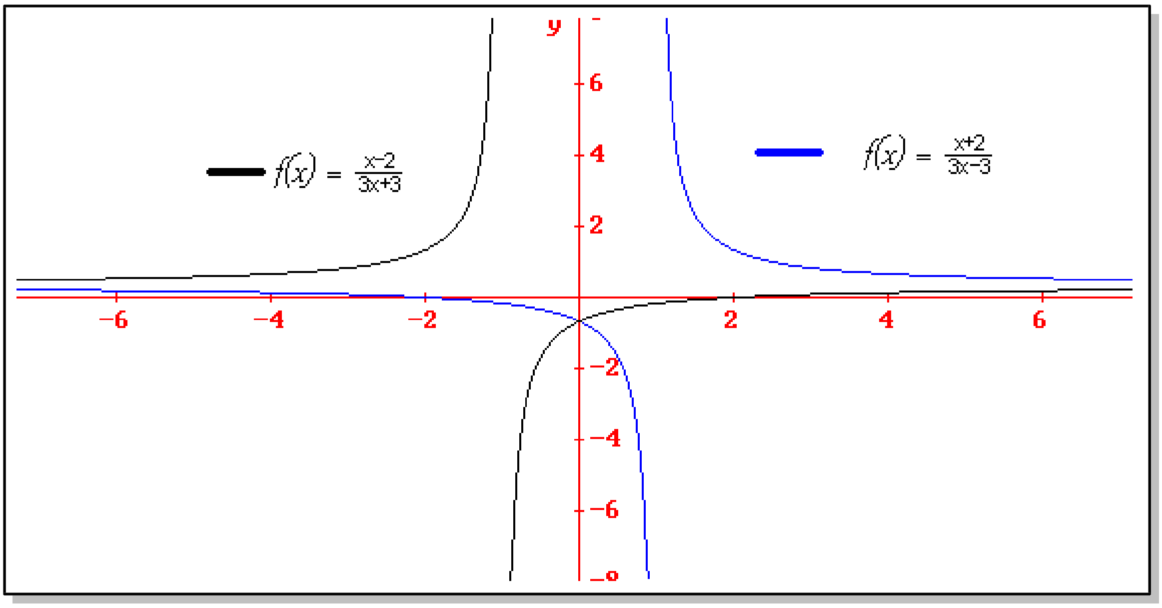
x	- ∞	(-∞ , -2)	-2	(-2 ,0)	0	(0 ,1)	1	(1 ,+∞)	+ ∞
y	→1/3,A.H	> 0	0, P.C.	< 0	-2/3 PC	> 0	∞, AV	> 0	→ 1/3, AH
Monotonía y máximos y mínimos									
f '(x)		< 0						< 0	
f(x)		⇘						⇘	
Curvatura y puntos de inflexión									
f "(x)		< 0						> 0	
f(x)		∩						∪	

8 *Representación*



b) $f(x) = \frac{x-2}{3x+3}$

Como $f(-x) = \frac{-x-2}{-3x+3} = \frac{x+2}{3x-3}$ = función del apartado a), las dos funciones son simétricas entre sí respecto del eje vertical, luego para representar esta nueva función sólo hay que "doblar el papel" respecto del eje vertical y cambiar de lado las dos ramas y tendremos la representación de la nueva función :



19 a) $f(x) = \frac{3}{x^2+2}$ **b)** $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

a) $f(x) = \frac{3}{x^2+2}$

1 *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador y como $x^2 + 2$ no se anula, sólo tiene raíces complejas, el dominio = $\mathcal{R}$.

2 *Asíntotas*

- Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función $\pm\infty$.
- Horizontal : $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2+2} = \frac{3}{\infty} = 0$; A.H. en y =0
- Oblicua : No tiene pues tiene horizontal.

3 *Cortes con los ejes*:

- Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0) No corta pues no se anula
- Eje vertical o de ordenadas (x = 0), f(0) = 3/2, luego es el (0,3/2).

4 *Simetrías*

$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2+2} = \frac{3}{x^2+2} = f(x)$, luego tiene simetría par, respecto del eje vertical (OY).

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+2)^2}$

☒ La derivada primera se anula para $x = 0$

☒ Los intervalos de signo constante son los $x < 0$ en donde la derivada primera es > 0 y por tanto la función es creciente y los $x > 0$ en donde la derivada primera es < 0, negativa, luego la función decreciente, luego en $x = 0$ hay un máximo relativo

6 *Concavidad e inflexiones*

La derivada segunda es $f''(x) = \frac{-6(x^2+2)^2-2(x^2+2)\cdot 2x(-6x)}{(x^2+2)^4} = \frac{-6(x^2+2)+24x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{18x^2-12}{(x^2+2)^3}$ que se anula para $18x^2 - 12 = 0$, $x = \pm 2/3$. Los intervalos de signo constante son pues :

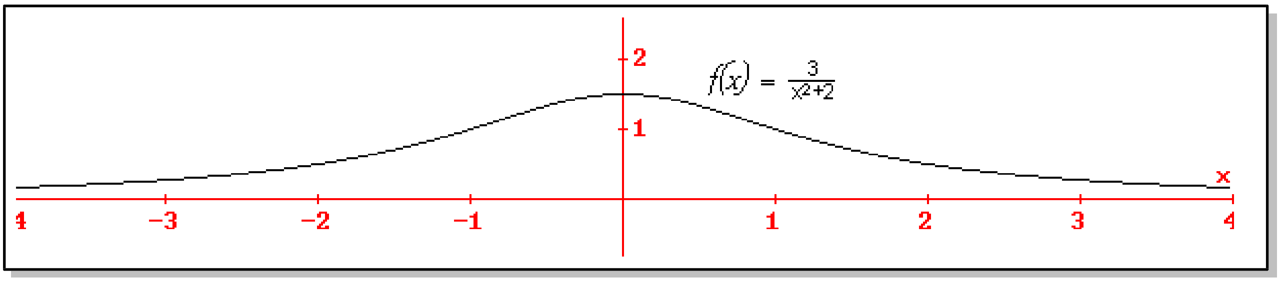
(-∞, - 2/3), en donde f " > 0 y la función cóncava hacia arriba.
(- 2/3 , 2/3) en donde f " < 0 y la función cóncava hacia abajo.
(2/3,+∞), en donde f " > 0 y la función cóncava hacia arriba.

En $x = \pm 2/3$ hay sendos puntos de inflexión ya que la segunda derivada cambia de signo y la función de concavidad.

7 *Tabla resumen*

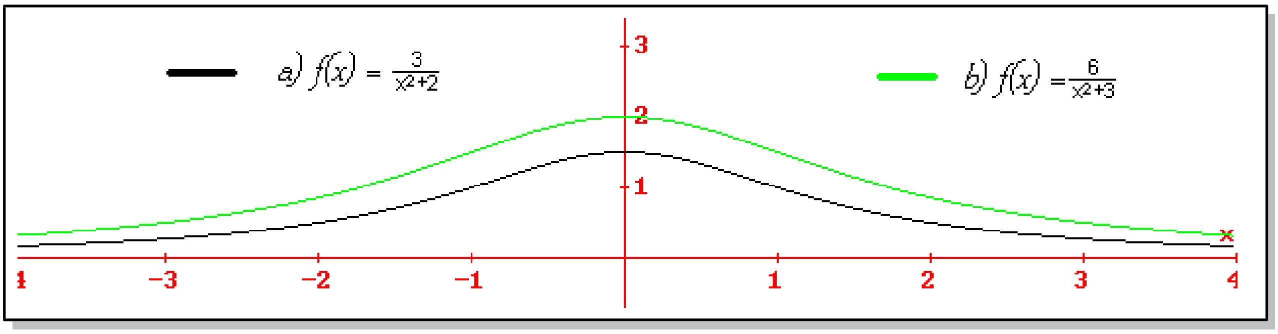
x	- ∞	(-∞ ,-2/3)	-2/3	(-2/3 , 0)	0	(0 , 2/3)	2/3	(2/3 ,+∞)	+ ∞
y	→0,A.H.	> 0	P.I	> 0	3/2,PC	>0	P.I.	> 0	→0,A.H.
f '(x)			> 0		0		< 0		
f(x)			↗		Máx		↘		
f "(x)		> 0	0		< 0		0	> 0	
f(x)		∪	P.I.		∩		P.I.	∪	

8 *Representación*



b) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Es de la misma forma pero cambia la posición del máximo, la asíntota horizontal que suben hacia arriba:



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

2 a) $f(x) = x^3(5-3x^2)$ **b)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

a) $f(x) = x^3(5-3x^2)$

1 *Dominio*

Como es una función polinómica el dominio es $\mathcal{R}$.

2 *Asíntotas*

○ Verticales : No tiene pues al ser polinómica no hay ningún valor de x que haga tender la función tiende a $\pm\infty$:

○ Horizontal : No tiene ya que $y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -3(\pm\infty)^5 = \mp\infty$

○ Oblicua : No tiene pues es polinómica de grado 5.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0), $x^3(5-3x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$, puntos (0, 0), (-1,29, 0), (1,29, 0) .

⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0). f(0) = 0, punto (0, 0)

4 *Simetrías*

Impar, respecto al origen ya que $f(-x) = (-x)^3(5-3(-x)^2) = -x^3(5-3x^2) = -f(x)$

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = 15x^2 - 15x^4$

☒ La derivada primera se anula para $15x^2(1-x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

☒ Los intervalos de signo constante son :

($-\infty$, -1) en donde la derivada primera es < 0 y por tanto la función es decreciente.
(-1, 0) en el cual la derivada primera es positiva y la función creciente.
(0, 1) en el cual la derivada primera es positiva y la función creciente.
(1,$+\infty$) en donde la derivada primera es negativa, luego la función decreciente.
Por tanto tiene :
Un mínimo en x = -1, $f(-1) = (-1)^3(5 - 3(-1)^2) = -1(5 - 3) = -2$, punto (-1, -2).
Un máximo en x = 1, $f(1) = 1^3(5 - 3\cdot 1^2) = 2$, punto (1, 2).

6 *Concavidad e inflexiones*

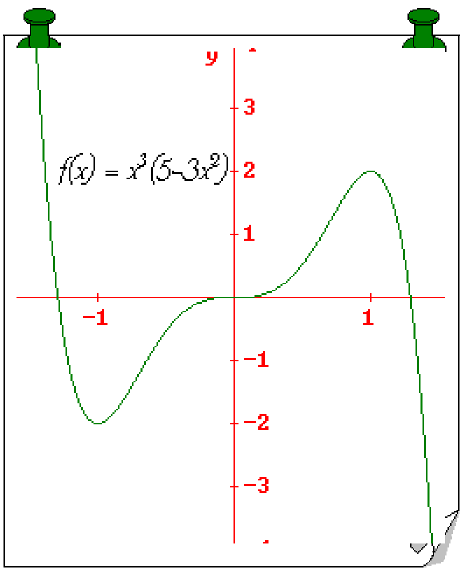
La derivada segunda es $f''(x) = 30x - 60x^3$ que se hace cero para:

$$30x(1-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

luego los intervalos de signo constante son :

($-\infty$, - 0.71) en donde la segunda derivada es > 0 y por tanto función cóncava hacia arriba.
(-0,71, 0) en donde la derivada segunda es negativa y la función cóncava hacia abajo.
(0, 0,71) en donde la segunda derivada es > 0 y por tanto función cóncava hacia arriba.
(0,71, $+\infty$) en donde la derivada segunda es negativa y la función cóncava hacia abajo.
Y, por tanto, tiene tres puntos de inflexión : en x = -0,71, en x = 0 y en x = 0,71.

7 *Representación*



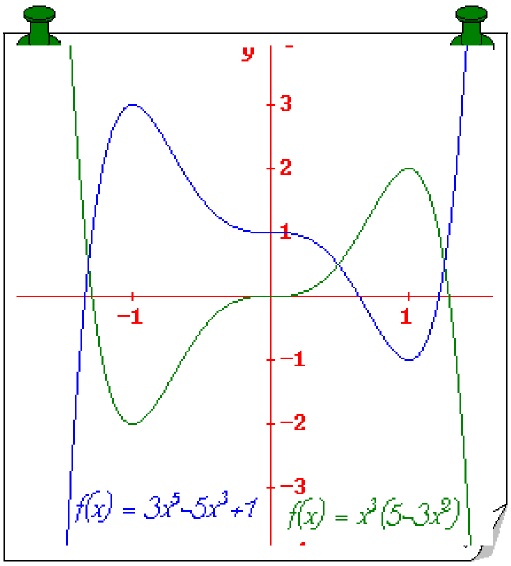
b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

Esta función se puede obtener a partir de la anterior mediante las siguientes transformaciones :

Cambio de signo : $y = -x^3(5 - 3x^2) = 3x^5 - 5x^3$ lo que supone un giro de 180º en torno al eje horizontal.

Sumando uno a la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, lo que significa un desplazamiento vertical hacia arriba de una unidad.

Luego la representación es :



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

21 **(a)** $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ **(b)** $f(x) = -\frac{3x}{\sqrt{4x^2+16}}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

(a) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

1 *Dominio*

Como es una función racional no pertenecen al dominio los valores que anulan el denominador y como $x^2 + 1$ no se anula, sólo tiene raíces complejas, el dominio = $\mathcal{R}$, pero además es irracional luego el dominio también son los valores que hacen el radicando positivo o nulo, $x^2 + 1 \geq 0$ luego el dominio = $\mathcal{R}$.

2 *Asíntotas*

O Verticales : No tiene pues no hay ningún valor de x que haga la función $\pm\infty$, ya que $x^2 + 1 \geq 0$.

○ Horizontal : $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{1} = \pm 2$; A.H. en y = ±2

○ Oblicua : No tiene pues tiene horizontal.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = f(x) = 0) x = 0 corta en el origen (0,0).
⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0), f(0) = 0, luego es el (0,0).

4 *Simetrías*

$f(-x) = \frac{2(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{2x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -f(x)$, luego tiene simetría impar, respecto del origen.

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{2x^2+2-2x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

☒ La derivada primera no se anula para ningún valor

☒ La función es siempre creciente o decreciente para saberlo damos un valor a la derivada primera f '(0) = 2 > 0, luego la función creciente en $\Re$.

6 *Concavidad e inflexiones*

La derivada segunda es $f''(x) = \frac{-6x^3-6x}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$ que se anula para $-6x^3 - 6x = 0$, x = 0. Los intervalos de signo constante son pues :

(-∞, 0), en donde f " > 0 y la función cóncava hacia arriba.

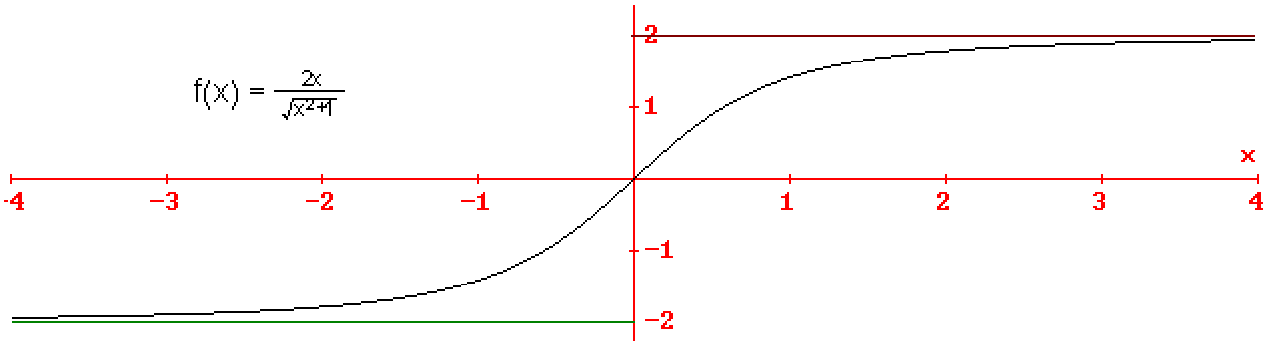
(0,+∞), en donde f " < 0 y la función cóncava hacia abajo.

En x = 0 hay un punto de inflexión ya que la segunda derivada cambia de signo y la función de concavidad.

7 *Tabla resumen*

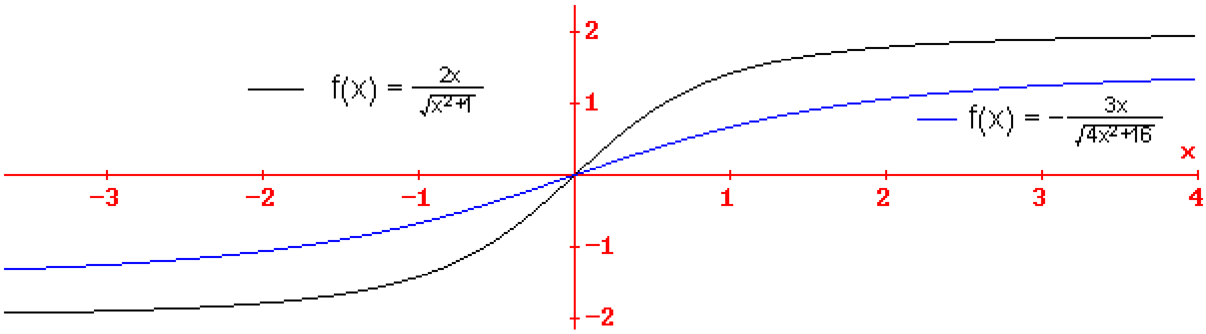
x	- ∞	(-∞ , 0)	0	(0 ,+∞)	+ ∞
y	→ −1,A.H.	< 0	0,PC	> 0	→1,A.H.
f '(x)		> 0			
f(x)		⇗			
f "(x)		> 0	= 0	< 0	
f(x)		∪	P.I.	∪	

8 *Representación*



(b) $f(x) = -\frac{3x}{\sqrt{4x^2+16}}$

Tiene la misma forma pero contraída respecto del eje vertical



22

(a) $f(x) = |(x^2 - 1)(x^2 - 4)|$ **(b)** $f(x) = |(x^2 - 2)(x^2 - 9)|$

(a) $f(x) = |(x^2 - 1)(x^2 - 4)|$

Representamos primero la función sin valor absoluto $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$.

1 *Dominio*

Como es una función polinómica el dominio es $\mathcal{R}$.

2 *Asíntotas*

○ Verticales : No tiene pues al ser polinómica no hay ningún valor de x que haga tender la función tiende a $\pm\infty$:

- Horizontal : No tiene ya que $y=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\pm\infty)^4=+\infty$

- Oblicua : No tiene pues es polinómica de grado 4.

3 *Cortes con los ejes*:

⌖ Eje horizontal o de abscisas (y = g(x) = 0):

$x^4-5x^2+4=0; x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}\begin{cases} x^2=\frac{2}{2}=1\Leftrightarrow x=\pm1 \\ x^2=\frac{8}{2}=4\Leftrightarrow x=\pm2\end{cases}$, puntos (-2, 0), (-1, 0), (1, 0) y (2, 0)

.

⌖ Eje vertical o de ordenadas (x = 0). g(0) = 0, punto (0, 4)

4 *Simetrías*

Par, simétrica respecto del eje vertical, ya que :

$g(-x)=(-x)^4-5(-x)^2+4=x^4-5x^2+4=g(x)$

5 Crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos

☒ Derivada primera g '(x) =$4x^3-10x$

☒ La derivada primera se anula para $4x^3-10x=0\begin{cases} x=0 \\ 4x^2-10=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\simeq\pm1,58\end{cases}$

☒ Los intervalos de signo constante son :

(-∞ , -1,58) en donde la derivada primera es < 0 y por tanto la función es decreciente.
(-1,58, 0) en el cual la derivada primera es positiva y la función creciente.
(0, 1,58) en el cual la derivada primera es negativa y la función decreciente.
(1,58,+∞) en donde la derivada primera es positiva, luego la función creciente.

Por tanto tiene :

Dos mínimos en x = -1,58, y x = 1,58.
Un máximo en x = 0 .

6 *Concavidad e inflexiones*

La derivada segunda es g ''(x) = $12x^2$ - 10, que se hace cero para:

$$12x^2-10=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\simeq\pm0,91$$

luego los intervalos de signo constante son :

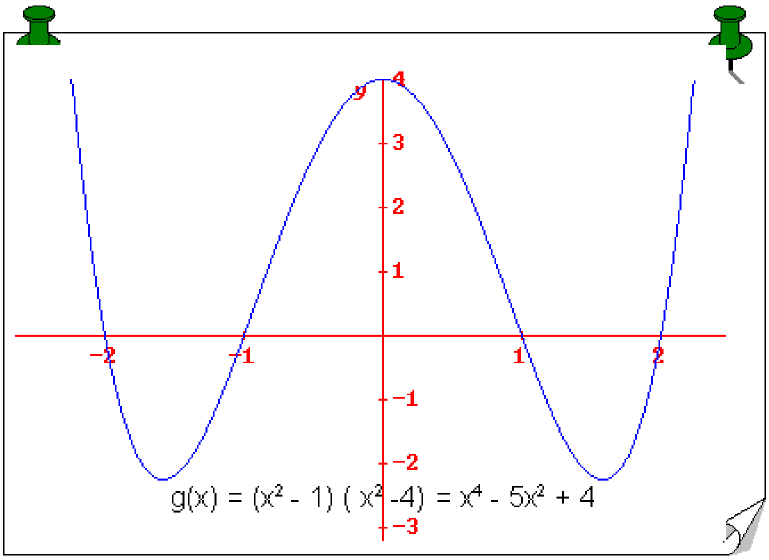
(-∞ , - 0.91) en donde la segunda derivada es > 0 y por tanto función cóncava hacia arriba.

(-0,91, 0,91) en donde la derivada segunda es negativa y la función cóncava hacia abajo.

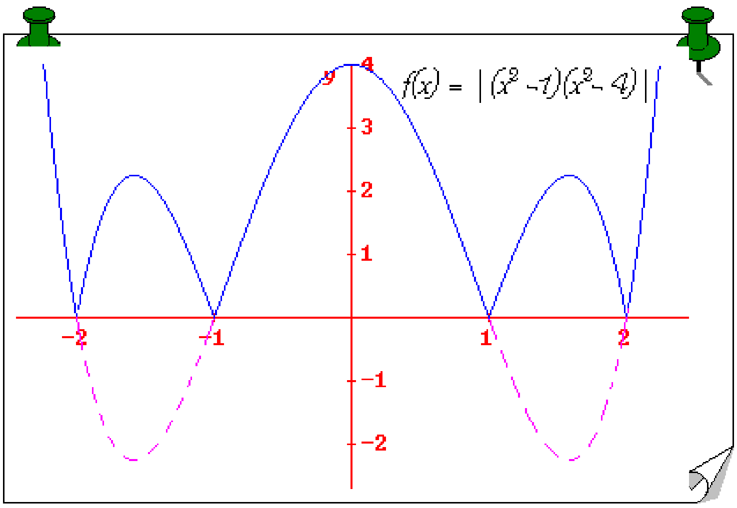
(0,91, +∞) en donde la derivada segunda es positiva y la función cóncava hacia arriba.

Y, por tanto, tiene dos puntos de inflexión : en x = - 0,91y en x = 0,91.

7 *Representación*

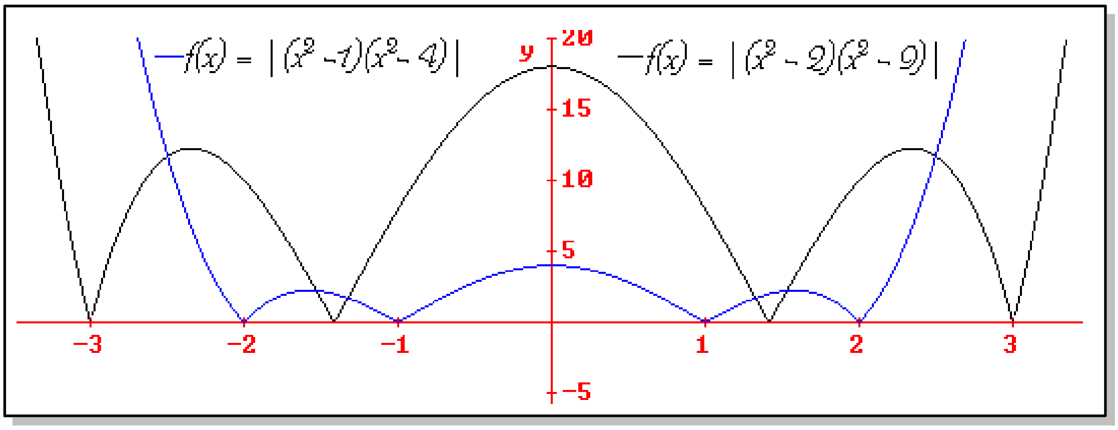


Ahora, para trasladar la misma función con valor absoluto, trasladamos los intervalos que estén por debajo del eje horizontal a por encima del eje horizontal :



(b) $f(x) = \left|(x^2 - 2)(x^2 - 9)\right|$

Esta función tiene la misma forma que la anterior pero expandida según ambos ejes:



◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

23 *Un número más el cuadrado de otro número suman 48 ¿Cómo deben elegirse esos números para que su producto sea máximo?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Primer número = x.
Segundo número = y

Función a optimizar = Producto de los dos números = P(x,y) = x ·y

Como tiene dos variables necesitamos una ecuación de condición :

Suma del segundo y el cuadrado del primero = 48 : $y + x^2 = 48$.
Si despejamos de esta última ecuación la variable y, y la sustituimos en la primera tenemos una función de x que puede ser optimizada por el procedimiento usual :

$y = 48 - x^2 \Rightarrow P(x) = x(48 - x^2) = 48x - x^3$, luego $P'(x) = 48 - 3x^2$, que igualamos a cero:

$$48 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{48}{3}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

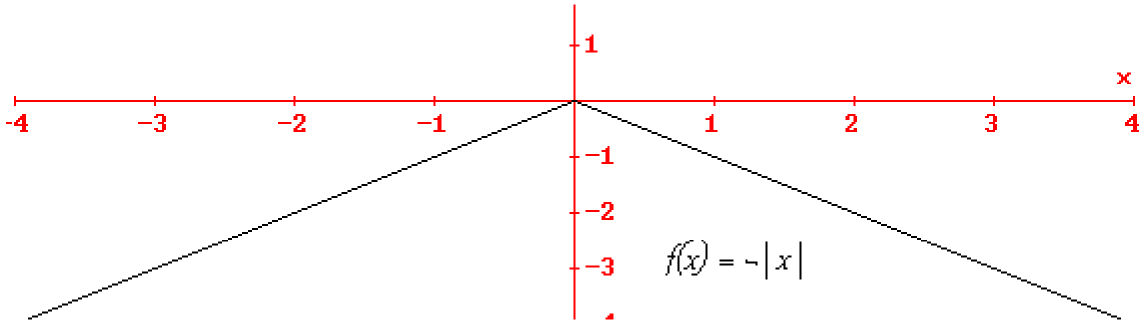
Para comprobar cuál es el máximo usamos el criterio de la derivada segunda :

$P''(x) = -6x$, luego $P''(-4) = -6(-4) = 24 > 0$, mínimo y $P''(4) = -24 < 0$, máximo, luego los números son :

$x = 4,\ y = 48 - 4^2 = 48 - 16 = 32$

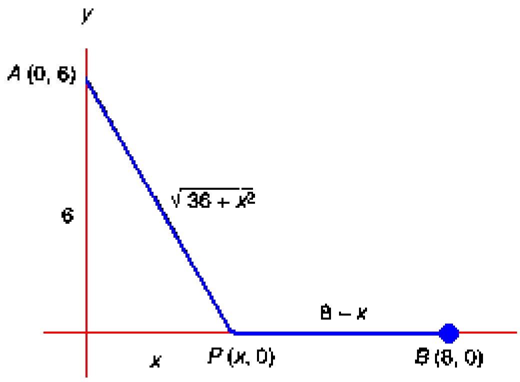
◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

24 *¿En qué punto presenta un máximo absoluto la función f(x) = −|x|? Dicho punto, ¿es máximo relativo? Justifica respuesta.*



Puede apreciarse en la figura que para x = 0 tiene un máximo absoluto pues para todo valor de x el valor de la función alcanza un valor menor que f(0) = 0.

25 *Deseamos unir el punto A (0, 6) del plano cartesiano con el punto B (8, 0), mediante dos cables rectos, uno que vaya de A a algún punto P del eje x y otro de P hasta B. El cable AP cuesta 1.000 ptas./m y el cable PB cuesta 3.000 ptas.*



¿Qué punto P hay que elegir para que la conexión de A con B sea lo más barata posible?

La función a optimizar (minimizar en este caso) es el coste del cable:

$$C(x) = 1000\sqrt{36+x^2} + 3000(8-x)$$

Para optimizarla seguimos los pasos habituales :

Hallar la derivada primera :

$$C'(x) = \frac{2000x}{2\sqrt{36+x^2}} - 3000 = \frac{1000x}{\sqrt{36+x^2}} - 3000$$

Igualar a cero :

$$\frac{1000x}{\sqrt{36+x^2}} - 3000 = 0 \Leftrightarrow 1000x = 3000\sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow x^2 = 9(36+x^2) \Leftrightarrow 324 = -8x^2$$

Como la ecuación no tiene solución no existe el mínimo relativo, el punto P debería ser el x = 8, es decir cable AP = $\sqrt{36+8^2} = 10$ m y cable PB = 0 m ;coste= 10 000 pts.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

26 *Repite el problema anterior, suponiendo ahora que el cable AP cuesta 3.000 ptas./m y el cable PB cuesta 1.000 ptas./m. ¿Se obtiene la misma solución?*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

La función a optimizar (minimizar en este caso) es el coste del cable:

$$C(x) = 3000\sqrt{36+x^2} + 1000(8-x)$$

Para optimizarla seguimos los pasos habituales :

Hallar la derivada primera :

$$C'(x) = \frac{3000x}{\sqrt{36+x^2}} - 1000$$

Igualar a cero :

$$\frac{3000x}{\sqrt{36+x^2}} - 1000 = 0 \Leftrightarrow 3000x = 1000\sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow 3x = \sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow 9x^2 = 36+x^2 \Leftrightarrow 36 = 8x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{36}{8}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ahora la distancia a la cual es mínimo el coste es $x = 3/\sqrt{2}$ m

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

En los Ejercicios 27-33 calcula el límite que se especifica.

27 $\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2}$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2} = \frac{(2-0)e^0-(2+0)}{0^2} = \frac{0}{0}$ Indeterminado, aplicamos la regla de L'Hopital, derivando el numerador y el denominador :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-(2+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(2-x)e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x-1}{2x}=\frac{(1-0)e^0-1}{0}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, derivamos de nuevo :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(1-x)e^x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{2}=\frac{0}{2}=0$$

28 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left\{\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\text{ Indeterminado}\right\}=[L'Hopital]=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{1}=\frac{\text{sen}0}{1}=\frac{0}{1}=0$$

29 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\ln 1}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ Indeterminado, aplicamos la regla de L'Hopital, después de realizar la resta :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\frac{1-1}{0+0}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, volvemos a derivar :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}=\frac{\frac{1}{(1+0)^2}}{\frac{1}{1+0}+\frac{1}{(1+0)^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

30 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\text{sen}(x-1)}\right)$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\text{sen}(x-1)}\right)=\frac{1}{\ln 1}-\frac{1}{\text{sen}(1-1)}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ Indeterminado, hacemos la diferencia y después derivamos :

$\lim_{x\to 1}\frac{x\text{sen}(x-1)-\ln x}{\ln x\cdot\text{sen}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)+x\cos(x-1)-\frac{1}{x}}{\frac{\text{sen}(x-1)}{x}+\ln x\cdot\cos(x-1)}=\frac{\text{sen}(1-1)+1\cdot\cos(1-1)-\frac{1}{1}}{\frac{\text{sen}(1-1)}{1}+\ln 1\cdot\cos(1-1)}=\frac{\text{sen}0+\cos 0-1}{\text{sen}0+0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$, ind, volvemos a derivar :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)+\cos(x-1)-x\text{sen}(x-1)+\frac{1}{x^2}}{\frac{x\cos(x-1)-\text{sen}(x-1)}{x^2}+\frac{\cos(x-1)}{x}-\ln x\cdot\text{sen}(x-1)}=\frac{2\cos 0-\text{sen}0+1}{\frac{\cos 0-\text{sen}0}{1}+\frac{\cos 0}{1}-0}=\frac{2-0+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

③① $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) = \infty(\infty-\infty)\text{ , indeterminado}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) = \left[\begin{array}{c}\text{multiplicamos}\\ \text{y dividimos por conjugado}\end{array}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\,(x+a-x)}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}/\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{x+a}{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{\infty}}+1} = \frac{a}{2}$$

③② $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}} = \left(\frac{1+tg0}{1+sen0}\right)^{\frac{1}{sen0}} = 1^{\infty}\text{ Ind.}$$

Aplicamos logaritmos y después la regla de L'Hopital las veces que sean necesarias:

$$\text{Si } L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}} \Rightarrow \ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}}\right) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{senx}\ln\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right) =$$

$$= \infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0\text{ Ind.} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)}{senx} = \frac{0}{0}\text{ Ind. podemos aplicar L'Hopital :}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)}{senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(sec^2x(1+senx)-\cos x(1+tgx))/(1+senx)^2}{\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)}}{\cos x} = \frac{\frac{(sec^2 0(1+sen0)-\cos 0(1+tg0))/(1+sen0)^2}{\left(\frac{1+tg0}{1+sen0}\right)}}{\cos 0} =$$

$$= \frac{\frac{(1(1+0)-1(1+0))/(1+0)^2}{\left(\frac{1+0}{1+0}\right)}}{1} = \frac{\frac{0}{1}}{1} = 0\text{, luego } L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}} = e^0 = 1$$

③③ $\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}} = (e^{+\infty}+\infty^3)^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0$ Indeterminado, aplicamos logaritmos y después L'Hopital :

$$\text{Si } L = \lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln L = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x^3)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \ln L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x^3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+3x^2)/(e^x+x^3)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = \frac{\infty}{\infty}\text{Ind}$$

Derivamos de nuevo :

$$\ln L = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+6x}{e^x+3x^2} = [\tfrac{\infty}{\infty}, \text{derivando}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+6}{e^x+6x} = [\tfrac{\infty}{\infty}, \text{derivando}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+6} = \frac{\infty}{\infty}\text{Ind}$$

Derivando por última vez :

$$\ln L = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \Rightarrow L = \lim_{x\to+\infty} (e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

34 *Se sabe que la gráfica de una función f pasa por el punto (1, 1) y que f'(1) = 2. Se conoce también que su derivada segunda es la función g(x) = 2. Calcula razonadamente la función f.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Si la derivada segunda g(x) = 2, es una constante es por que su derivada primera es una función lineal de primer grado y la función inicial de segundo grado es decir :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$$

Tenemos que hallar los tres coeficientes a, b y c, necesitamos al menos tres ecuaciones :

$$\left\{\begin{array}{c} P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow a+b+c=1 \ (1) \\ f'(1) = 2 \Leftrightarrow 2a+b=2 \ (2) \\ f''(x) = 2a = g(x) = 2 \ (3) \end{array}\right\}$$

de (3) a = 2/2 = 1 y sustituyendo en la ecuación (2) 2·1+b = 2; b = 2 - 2 = 0 y por último de la primera despejamos el valor de c = 1 - a - b = 1 - 1 - 0 = 0. La función es, por tanto :

$f(x) = x^2$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

35 *Determina un polinomio del menor grado posible que tiene en (-1, 15) un máximo relativo y en (2, 12) un mínimo relativo.*

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

Al tener un máximo y un mínimo la derivada primera ha de ser (como mínimo) de segundo grado (dos soluciones) y por lo tanto la función es de tercer grado :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Como tenemos cuatro incógnitas, a, b , c y d, necesitamos, al menos, cuatro ecuaciones :

$$\left\{\begin{array}{c} (-1,15) \Leftrightarrow f(-1) = 15 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 15 \\ (2,12) \Leftrightarrow f(2) = 12 \Leftrightarrow 8a+4b+2c+d = 12 \\ \text{Máximo en } x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a-2b+c = 0 \\ \text{Mínimo en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\}$$

resolvemos el sistema por el método de Gauss :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 15 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & | & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 15 \\ 9 & 3 & 3 & 0 & | & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 0 & | & -3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - 3F_2 \\ F_4 - F_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & | & -3 \\ 9 & 6 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} -a & +b & -c & +d = 15 \\ 3a & -2b & +c & = 0 \\ & 9b & & = -3 \\ 9a & +6b & & = 0 \end{array}\right.$$

de la (3) $b = -\frac{1}{3}$, de la (4) $a = \frac{2}{9}$ de la (2) despejamos $c = -3a + 2b = -2/3 - 2/3 = -4/3$ y por último de la (1) despejamos $d = 15 + a - b + c = 15 + 2/9 + 1/3 - 4/3 = 128/9$.

El polinomio buscado es :

$$P(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{128}{9}$$

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

36 *Dada la función*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

determina a, b, c y d para que la función tenga un máximo en x = 0 con f(0) = 4 y un mínimo en x = 2 con f(2) = 0.

◊◊◊▣▣⊙▣▣◊◊◊

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Como tenemos cuatro incógnitas, a, b , c y d, necesitamos, al menos, cuatro ecuaciones :

$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = 4 \Leftrightarrow d = 4 \\ f(2) = 0 \Leftrightarrow 8a+4b+2c+d = 0 \\ \text{Máximo en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \\ \text{Mínimo en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\}$$

resolvemos el sistema :

como d = 4 y c = 0, sustituyendo en las otras dos nos queda el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} 8a & +4b & = & -4 \\ 12a & +4b & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a & +b & = & -1 \\ 3a & +b & = & 0 \end{cases} \xrightarrow[E_2 - E_1]{} \begin{cases} 2a & +b & = & -1 \\ a & & = & 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1 - 2a = -3$$

La función es : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.