

EJERCICIOS PROPUESTOS (página 31)

1 Sin resolverlos, ¿son equivalentes estos sistemas?

$$a) \begin{cases} x+y = 5 \\ 2x-y = 7 \end{cases}, \begin{cases} x+y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases} b) \begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+y = 7 \end{cases} \begin{cases} z = 2 \\ x+y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+y = 7 \\ 2x+2y = 12 \end{cases} \begin{cases} z = 2 \\ x+y = 7 \end{cases} d) \begin{cases} x+y-z = 11 \\ x+2y-z = 7 \end{cases} \begin{cases} x+y-z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$$

---oo0oo---

Se trata de partir de uno de los dos y, mediante combinaciones lineales por filas, obtener el otro :

$$a) \begin{cases} x+y = 5 \\ 2x-y = 7 \end{cases} E_2 + E_1 \rightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+y = 7 \end{cases} E_2 - E_1 \rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+y = 7 \\ 2x+2y = 12 \end{cases}, \text{ la tercera ecuación es la suma de las otras dos, podemos suprimirla y}$$

$$\text{el sistema queda: } \begin{cases} x+y-z = 5 \\ x+y = 7 \end{cases} E_2 - E_1 \rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x+y-z = 11 \\ x+2y-z = 7 \end{cases} E_2 - E_1 \rightarrow \begin{cases} x+y-z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS (página 33)

1 Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x+y = 1 \\ 3x+2y = 4 \\ x+y = 3 \end{cases} b) \begin{cases} x+y+z = 6 \\ y-z = 1 \\ x+2y = 7 \end{cases} c) \begin{cases} x+y+z = 6 \\ x+y+z = 0 \\ x-z = 0 \end{cases} d) \begin{cases} x+y+z = 6 \\ y-z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

---oo0oo---

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{E_1 - E_3} \begin{cases} x = -2 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

ecuaciones y comprobamos si obtenemos el mismo valor de la y:

$$3(-2) + 2y = 4; 2y = 10; y = 5$$

$$-2 + y = 3; y = 5$$

Luego la solución $x = -2$ e $y = 5$ cumple las tres ecuaciones, es la solución.

Se trata de tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$
 La tercera ecuación es la suma de las otras dos, podemos prescindir

de ella y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, es compatible e indeterminado:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 + z + z = 6 \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

si $z = \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $x = 5 - 2\lambda$, luego se trata de tres planos que se cortan según una recta.

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$
 las dos primeras tienen el primer miembro igual pero los términos

independientes diferentes, son contradictorias, luego el sistema no tiene solución, es incompatible.

Las dos primeras son planos paralelos, la tercera los corta según una recta.

d)
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - y - z = 6 - 1 - 1 = 4 \\ y = z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$
 es un sistema compatible y determinado cuya

solución es $(x = 4, y = 1, z = 1)$. Son tres planos que se cortan en un punto.



2 a) Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

---oo0oo---

a) $\begin{cases} x+2y = 3 \\ x-y = 4 \end{cases} \xrightarrow{E_1-E_2} \begin{cases} 3y = -1 \\ x-y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1/3 \\ x = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}$ la solución es $(x = 11/3, y = -1/3)$.

b) Para que siga siendo compatible la ecuación añadida ha de ser combinación lineal de las otras dos, por ejemplo $E_3 = 2E_1 + E_2 = 2(x + 2y = 3) + (x - y = 4) = 3x + 3y = 10$.

c) Para que sea incompatible ha de ser una recta paralela, es decir los coeficientes han de ser proporcionales a cualquiera de las dos pero no los términos independientes, por ejemplo $3x + 6y = 11$.

d) En el caso **a)** se trata de dos rectas secantes en el punto de corte $(x = 11/3, y = -1/3)$.

En el caso **b)** la recta añadida también pasa por el punto de corte de las otras dos, son las tres secantes.

En el caso **c)** la recta añadida es paralela a la primera.



EJERCICIOS PROPUESTOS (páginas 34)

1 Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x-2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x = 6 \\ x+y+3z = 7 \\ 5x-z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x+y+3z = 7 \\ 5x-z+t = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+3z = 0 \\ x+3y-z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$

---oo0oo---

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x-2y = 5 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7}{3}$
 $y = \frac{x-5}{2} = \frac{\frac{7}{3}-5}{2} = \frac{\frac{7-15}{3}}{2} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

b) $\begin{cases} 2x = 6 \\ x+y+3z = 7 \\ 5x-z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+3z = 7 \rightarrow y = 7-x-3z = 7-3-3 \cdot 1 = -29 \\ 5x-z = 4 \rightarrow z = 5x-4 = 5 \cdot 3-4 = 11 \\ 2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x+y+3z = 7 \\ 5x-z+t = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 6+2t \rightarrow x = \frac{6+2t}{2} = 3+t \\ 5x-z = 4-t \rightarrow z = 5x-4+t = 5(3+t)-4+t = 11+6t \\ x+y+3z = 7 \rightarrow y = 7-x-3z = 7-(3+t)-3(11+6t) = -29-19t \end{cases}$

$$d) \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases} \begin{cases} 4x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \\ 2x + 3z = 0 \rightarrow z = -\frac{2x}{3} = -\frac{2}{3} \\ x + 3y - z = 7 \rightarrow y = \frac{7 + z - x}{3} = \frac{7 - \frac{2}{3} - 1}{3} = \frac{16}{9} \end{cases}$$



2 ¿ Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos :

$$a) \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 2 \rightarrow z = 2/2 = 1 \\ z + t = 3 \rightarrow t = 3 - z = 3 - 1 = 2 \\ y + 3z - 2t = 4 \rightarrow y = 4 - 3z + 2t = 4 - 3 + 4 = 5 \\ x - z + 2t = 5 \rightarrow x = 5 + z - 2t = 5 + 1 - 4 = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 4 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 + z \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = \frac{4 + z}{2} \\ x + y = 7 - z \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = 7 - z - x = 7 - z - \frac{4 + z}{2} = 5 - \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\text{Si llamamos a } z = \lambda, \text{ tenemos la solución: } \begin{pmatrix} x = 2 + \frac{\lambda}{2} \\ y = 5 - \frac{3\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \rightarrow z = 3 - y - t - x = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{cases}$$

$$\text{Si hacemos } t = \mu \text{ e } y = \lambda \text{ tenemos la solución: } \begin{pmatrix} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \\ t = \mu \end{pmatrix} \text{ en función de dos}$$

parámetros.

$$d) \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = 1 - 2y = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0 \\ \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = 1 - 2y - 2z = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 0 \end{array}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS (páginas 35)

3 Transforma en escalonados y resuelve:

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \xrightarrow{E_1} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \xrightarrow{E_2 - E_1} 2y - 2z = 6 \\ x + 2y - z = 6 \xrightarrow{E_3 - E_1} 3y - 4z = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 / 2 \\ 2E_3 - 3E_2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -2z = 2 \end{array} \right\} \begin{cases} x = -4 + y - 3z = 1 \\ y = 3 + z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \xrightarrow{E_1} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \xrightarrow{E_2 - E_1} -2y - 2z = -10 \\ 3x + y + z = 8 \xrightarrow{E_3 - 3E_1} -2y - 2z = -10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 / -2 \\ E_3 - E_2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{cases} \text{ si llamamos a } z = \lambda: \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{pmatrix}$$



4 Transforma en escalonado y resuelve:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \xrightarrow{E_1} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \xrightarrow{E_2 - 3E_1} y - 14z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \xrightarrow{E_3 - E_1} 3y - 4z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \xrightarrow{E_4 - E_1} -2y - 2z + 2w = -26 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - 3E_2 \\ E_4 + 2E_1 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 38z - 18w = 114 \\ -30z + 16w = -90 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{E_1} x - y + 3z = 0 \\ \xrightarrow{E_2} y - 14z + 7w = -32 \\ \xrightarrow{E_3} 38z - 18w = 114 \\ \xrightarrow{19E_4 + 15E_3} 34w = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y - 3z = 1 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ z = \frac{114 + 18w}{38} = 3 \\ w = 0 \end{array}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS (página 38)

1 Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$
 Escribimos la matriz asociada ampliada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 - 3E_1 \\ E_3 + 2E_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ 5E_3 + 3E_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right)$$

que ya está escalonada, pasamos al sistema y lo resolvemos en cascada inversa:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 \\ 8z = 24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \\ y = \frac{2 - 4z}{-5} = \frac{2 - 12}{-5} = -2 \\ z = \frac{24}{8} = 3 \end{array} \quad \text{Solución: } (x = 1, y = -2, z = 3)$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$
 Escribimos la matriz asociada ampliada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ 3E_2 + 2E_1 \\ 3E_3 - 5E_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & 7 & 8 \\ 0 & 17 & -7 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 + E_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right) \text{ como}$$

la última fila es inconsistente (0 no puede ser igual a 18) el sistema es incompatible, no tiene solución.

c)
$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$
 Escribimos la matriz asociada ampliada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 + 2E_1 \\ E_3 - 2E_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 + 5E_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

que ya está escalonada, pero como la última fila es nula quedan dos ecuaciones no nulas y tres incógnitas, luego el sistema es compatible e indeterminado (uniparamétrico), lo resolvemos en cascada inversa:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{cases} \quad \text{si hacemos } y = \lambda \text{ la solución es } (x = -3 + 2\lambda, y = \lambda, z = -2 + \lambda)$$



2 Resuelve mediante el método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases}$$
 Escribimos la matriz asociada ampliada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

que ya está escalonada, pero como la última fila es nula quedan dos ecuaciones no nulas y tres incógnitas, luego el sistema es compatible e indeterminado (uniparamétrico), lo resolvemos en cascada inversa:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + y - 2z = 2 + \frac{5 - 3z}{2} - 2z = \frac{9 - 7z}{2} \\ y = \frac{5 - 3z}{2} \end{cases} \quad \text{si hacemos } z = \lambda \text{ la solución es:}$$

$$\begin{pmatrix} x = \frac{9 - 7\lambda}{2} \\ y = \frac{5 - 3\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

Este tipo de sistemas cuyos términos independientes son todos nulos se conocen como **sistemas homogéneos** y, es evidente que, siempre tienen una solución trivial en la que todas las incógnitas sean nulas ($x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$ en este caso), pero además pueden tener otras infinitas soluciones además de la trivial (entonces es cuando decimos que tienen solución). Seguimos el procedimiento normal para su resolución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-2F_2 \\ F_2 \\ F_3-5F_2 \\ F_4-5F_2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \\ F_4-2F_1}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y - z + w = 0 \rightarrow w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \rightarrow x = 0 \\ 6y - 2z = 0 \rightarrow z = 0 \\ -4y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \text{ sólo tiene la solución trivial.}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & | & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-2F_2 \\ F_2 \\ F_3-5F_2 \\ F_4-5F_2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & -13 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 11 \\ 0 & 9 & -4 & 1 & | & -31 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & | & -55 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \\ F_4-2F_1}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & -13 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 11 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & | & -18 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & -29 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 & | & -13 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 11 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & | & -18 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & | & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y - z + w = -13 \rightarrow w = -13 + z - 3y = -13 + \frac{69}{4} - \frac{33}{4} = -4 \\ x - 2y + z = 11 \rightarrow x = 11 + 2y - z = 11 + \frac{11}{2} - \frac{69}{4} = -\frac{3}{4} \\ 6y - 2z = -18 \rightarrow z = \frac{6y+18}{2} = \frac{6 \cdot \frac{11}{4} + 18}{2} = \frac{69}{4} \\ -4y = -11 \rightarrow y = \frac{11}{4} \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS (página 39)

1 Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2, C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{cases} -z + y + x = 2 \\ +2y + 4x = k \\ z + y + kx = 1 \end{cases} \text{ seguimos el método de Gauss,}$$

escalando la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 1 & 1 & k & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 0 & 2 & k+1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 0 & 0 & k-3 & | & 3-k \end{pmatrix}$$

Hay dos casos:

❶ Si $k - 3 = 0$, es decir $k = 3$ el sistema (que es *compatible e indeterminado*) queda:

$$\begin{cases} -z + y + x = 2 & \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = y + x - 2 = \frac{3}{2} - x + x - 2 = -\frac{1}{2} \\ 2y + 4x = 3 & \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = \frac{3-4x}{2} = \frac{3}{2} - x \end{cases} \text{ si hacemos } x = \lambda, \text{ la solución}$$

del sistema es
$$\begin{pmatrix} x = \lambda \\ y = \frac{3}{2} - \lambda \\ z = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

❷ Si $k \neq 3$, el sistema es *compatible y determinado*:

$$\begin{cases} -z + y + x = 2 & \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = y + x - 2 = 2 + \frac{k}{2} - 1 - 2 = \frac{k}{2} - 1 \\ +2y + 4x = k & \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2} \\ (k-3)x = 3-k & \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = \frac{3-k}{k-3} = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2, C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{cases} -z + y + x = 2 \\ +2y + 4x = k \\ z + y + kx = 0 \end{cases} \text{ seguimos el método de Gauss,}$$

escalando la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 1 & 1 & k & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 0 & 2 & k+1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & | & k \\ 0 & 0 & k-3 & | & 2-k \end{pmatrix}$$

Hay dos casos:

❶ Si $k - 3 = 0$, es decir $k = 3$ el sistema queda:
$$\begin{cases} -z + y + x = 2 \\ 2y + 4x = 3 \\ 0 \neq -1 \end{cases} \text{ como la última ecuación no puede ser una}$$

igualdad el sistema es *incompatible*.

❷ Si $k \neq 3$, el sistema es *compatible y determinado*:

$$\left\{ \begin{array}{l} -z + y + x = 2 \\ +2y + 4x = k \\ (k-3)x = 2-k \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = y + x - 2 = \frac{k^2 + k + 8}{2(k-3)} + \frac{2-k}{k-3} - 2 = \frac{k^2 - 5k + 24}{2(k-3)} \\ \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} \cdot \frac{2-k}{k-3} = \frac{k^2 + k + 8}{2(k-3)} \\ \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = \frac{2-k}{k-3} \end{array}$$

2 Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{ \begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array} \right. \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left\{ \begin{array}{l} -z + y + kx = 8 \\ z + y + x = 0 \\ z + 2x = k \end{array} \right.$ seguimos el método de Gauss,

escalando la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & k & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & k & 8 \\ 0 & 2 & k+1 & 8 \\ 0 & 1 & k+2 & k+8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & k & 8 \\ 0 & 2 & k+1 & 8 \\ 0 & 0 & k+3 & 2k+8 \end{array} \right)$$

Hay dos casos:

1 Si $k+3=0$, es decir $k=-3$, el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} -z + y - 3x = 8 \\ 2y - 2x = 8 \\ 0 \neq 2 \end{array} \right. \text{ como la tercera fila no puede ser una igualdad, el sistema es } \textit{incompatible}.$$

2 Si $k \neq -3$, el sistema es *compatible y determinado*:

$$\left\{ \begin{array}{l} -z + y + kx = 8 \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = y + kx - 8 = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3} + k \frac{2k+8}{k+3} - 8 = \frac{k^2 - k - 16}{k+3} \\ 2y + (k+1)x = 8 \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = \frac{8 - (k+1)x}{2} = \frac{8 - (k+1) \frac{2k+8}{k+3}}{2} = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3} \\ (k+3)x = 2k+8 \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = \frac{2k+8}{k+3} \end{array} \right.$$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array} \right.$ seguimos el método de Gauss, escalando la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & | & k-2 \end{pmatrix}$$

Hay dos casos:

❶ Si $-1 - k = 0$, es decir $k = -1$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ 0 \neq -3 \end{cases} \text{ como la tercera fila no puede ser una igualdad, el sistema es } \textit{incompatible}.$$

❷ Si $k \neq -1$, el sistema es *compatible y determinado*:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \xrightarrow{\text{Despejamos } x} x = 1 - y - z = 1 - \frac{k^2 - k + 1}{k + 1} + \frac{k - 2}{k + 1} = \frac{-k^2 + 3k - 2}{k + 1} \\ y + kz = 1 \xrightarrow{\text{Despejamos } y} y = 1 - kz = 1 + k \frac{k - 2}{k + 1} = \frac{k^2 - k + 1}{k + 1} \\ (-k - 1)z = k - 2 \xrightarrow{\text{Despejamos } z} z = -\frac{k - 2}{k + 1} \end{cases}$$



PARA PRACTICAR (página 44)

❶ Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos gráficamente:

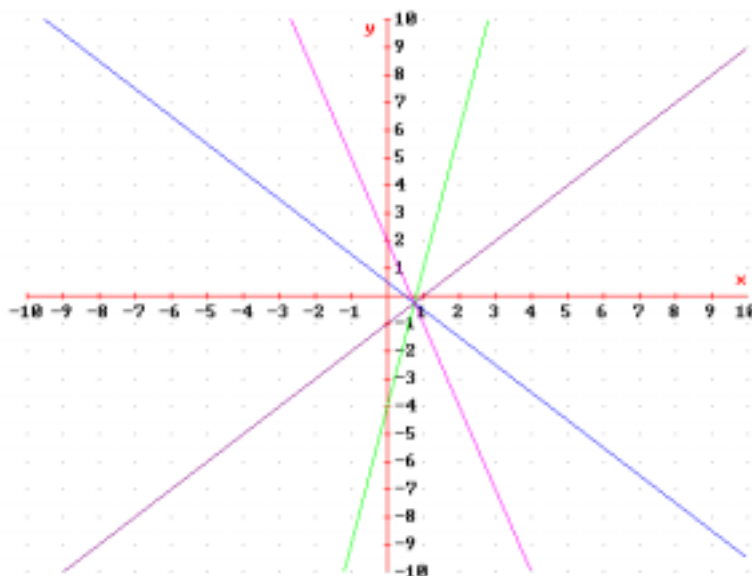
$$a) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

---oo0oo---

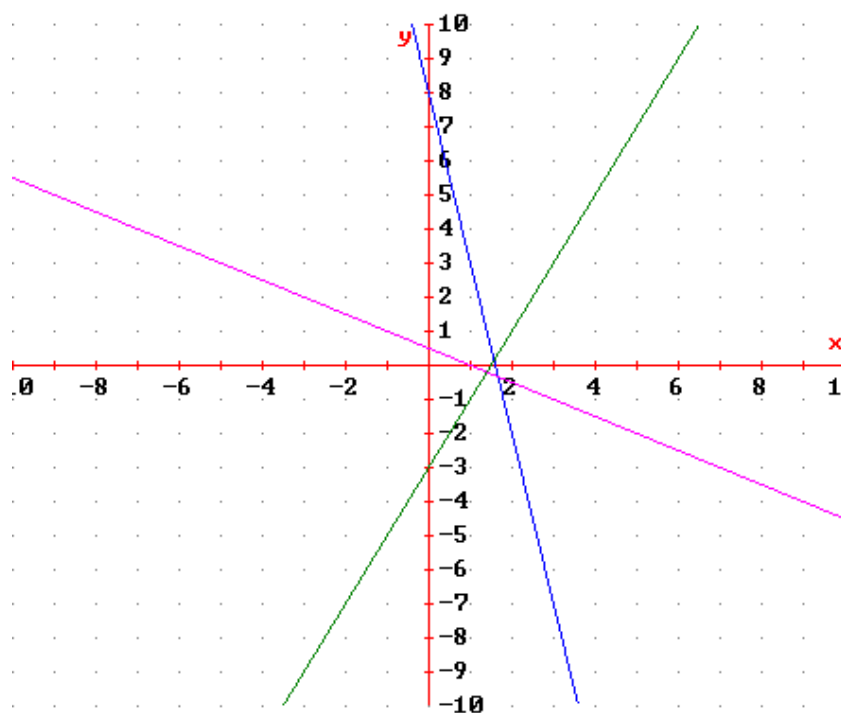
$$a) \begin{cases} 3x + y = 2 \xrightarrow{F_1} 3x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 3x = 2 - 9/4 = -1/4 \\ x - y = 1 \xrightarrow{F_2 + F_1} 4x = 3 \Rightarrow x = 3/4 \\ 5x - y = 4 \xrightarrow{F_3 + F_1} 8x = 6 \Rightarrow x = 6/8 = 3/4 \\ 2x + 2y = 1 \xrightarrow{F_4 - 2F_1} -4x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

El sistema representa a cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$



b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -1 & | & 3 \\ 5 & 1 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & 1 \\ 0 & -9 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -5y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{5} \\ -9y = 3 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

obtienen valores de y distintos, luego el sistema es *incompatible*



Son tres rectas que se cortan dos a dos pero no las tres.



2 comprueba que este sistema es incompatible y razona cuál es la posición relativa de las tres rectas que representa:

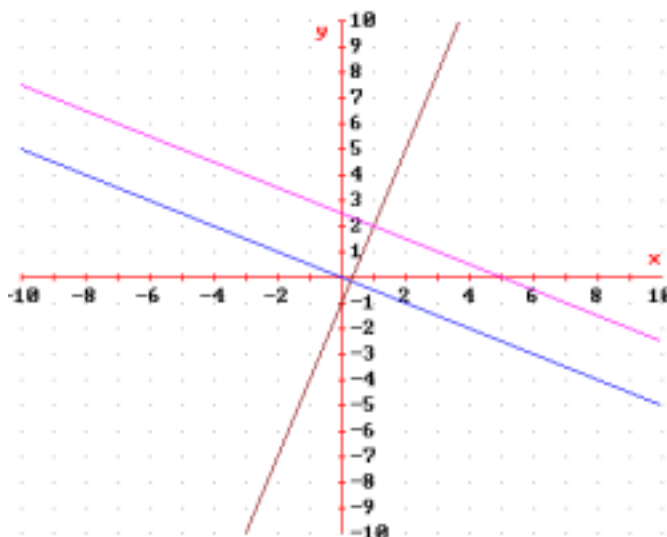
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

---oo0oo---

Utilizamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 3 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & -7 & | & -14 \\ 0 & 0 & | & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -7y = -14 \\ 0 \neq -10 \end{cases}$$

la tercera ecuación es una desigualdad luego el sistema no puede tener solución es incompatible.



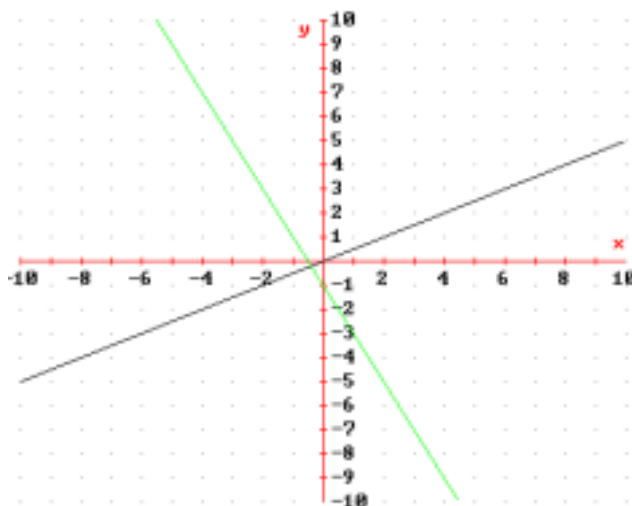
La 1ª y la 3ª son rectas paralelas (no tienen ningún punto común) y la 2ª las corta.



3 Resuelve e interpreta geoméricamente el sistema :

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ 3x/2 - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{ya que la 3ª}$$

fila es nula $\begin{cases} -x + 2y = 0 & x = 2y = 2/5 \\ 5y = 1 & y = 1/5 \end{cases}$. Se trata de tres rectas que se cortan en el punto (2/5, 1/5), la primera y la tercera son coincidentes (la misma recta) y la segunda la corta.



4 Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} 2x - y = 7 \rightarrow x = \frac{7+y}{2} = \frac{7-69/11}{2} = \frac{4}{11} \\ 11y = -69 \rightarrow y = -69/11 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -y + z = 1 \rightarrow y = z - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9} \\ 9z = 2 \rightarrow z = 2/9 \\ 3x - y + z = 3 \rightarrow x = \frac{3+y-z}{3} = \frac{3-\frac{7}{9}-\frac{2}{9}}{3} = \frac{\frac{18}{9}}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - t = 2 \rightarrow x = 2 + t - y = 2 + 2z - 3 - 4 + z = 3z - 5 \\ y + t = 1 + z \rightarrow t = 1 + z - y = 1 + z - 4 + z = 2z - 3 \\ y = 4 - z \end{cases} \quad \text{Si hacemos } z$$

$$= \lambda, \text{ la solución es: } \begin{pmatrix} x = 3\lambda - 5 \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \\ t = 2\lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \rightarrow z = 1 - 2x + 3y = 1 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} \\ 3x - y = 0 \rightarrow x = \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ 2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$$



5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 2F_2 \\ 2F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -20 \\ 0 & -5 & 2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 5F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & -18 & -108 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & -18 & -108 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 16 \rightarrow x = \frac{16 - 5y}{2} = \frac{16 - 20}{2} = -2 \\ y - 4z = -20 \rightarrow y = -20 + 4z = -20 + 24 = 4 \\ -18z = -108 \rightarrow z = \frac{-108}{-18} = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_3 \\ F_2 - 5F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 - F_2 \\ F_2 \\ F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 0 & -2 & 8 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema C.I.}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + z \rightarrow x = 1 + z - y = -1 - 3z \\ -y = -2 - 4z \rightarrow y = 2 + 4z \end{cases}$$

Si hacemos $z = \lambda$ las solución es: $(x = -1 - 3\lambda, y = 2 + 4\lambda, z = \lambda)$

b)

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & | & 3 \\ 6 & -6 & 2 & | & -16 \\ 1 & -1 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 - 3F_3 \\ F_2 - 6F_3 \\ F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 & | & 21 \\ 0 & 0 & -10 & | & 20 \\ 1 & -1 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.D.}}$$

$$\begin{cases} 7y - 7z = 21 \xrightarrow{2)} y = 3 + z = 1 \\ -10z = 20 \xrightarrow{1)} z = -2 \\ x - y + 2z = -6 \xrightarrow{3)} x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{cases} \quad \text{Solución : } (x = -1, y = 1, z = -2)$$



8 Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geoméricamente:

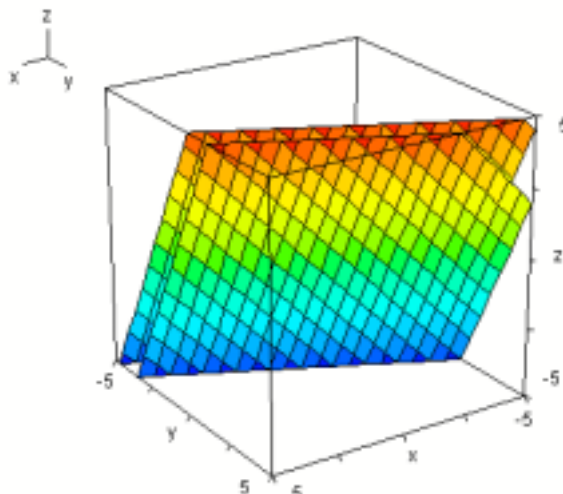
$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 2 & 4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 \neq -5 \end{cases}$$

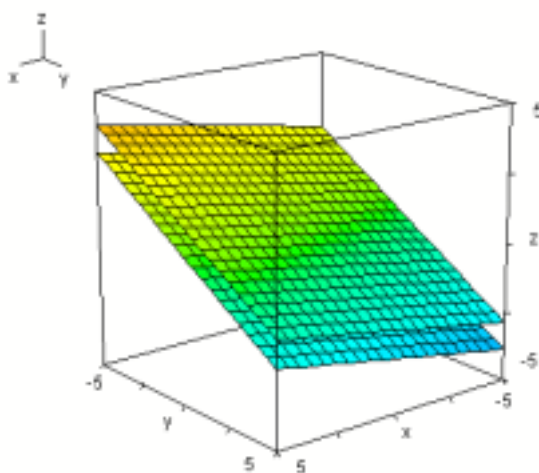
Como la segunda no es una igualdad, el sistema es incompatible. Se trata de dos planos paralelos:



b)

$$\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -6 & -12 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 + 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ 0 \neq 12 \end{cases}$$

Como la segunda no es una igualdad, el sistema es incompatible. Se trata de dos planos paralelos:



9 Resuelve, si es posible, los sistemas :

$$\begin{aligned} \text{a)} \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} & \quad \text{b)} \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} & \quad \text{c)} \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} & \quad \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

---oo0oo---

a)

$$\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ x-y-z = -10 \\ 2x-y+z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 1 & -1 & -1 & | & -10 \\ 2 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 0 & -3 & -2 & | & -19 \\ 0 & -5 & -1 & | & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2-2F_3 \\ F_3 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 9 \\ 0 & 7 & 0 & | & 7 \\ 0 & -5 & -1 & | & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} x+2y+z=9 \xrightarrow{3)} x=9-2y-z=-1 \\ 7y=7 \xrightarrow{1)} y=1 \\ -5y-z=-13 \xrightarrow{2)} z=13-5y=8 \end{cases} \quad \text{Luego el sistema}$$

es compatible y determinado: $(x = -1, y = 1, z = 8)$

b) $\begin{cases} x+2y+z = 3 \\ 2x-y+z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & -1 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.I.}}$

$$\begin{cases} x+2y+z = 3 \\ -5y-z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3-z \xrightarrow{2)} x=3-z-2y=3-z-2\frac{7-z}{5}=\frac{1-3z}{5} \\ -5y=-7+z \xrightarrow{1)} y=\frac{7-z}{5} \end{cases}$$

Haciendo $z = \lambda$, la solución es: $\left(x = \frac{1-3\lambda}{5}, y = \frac{7-\lambda}{5}\right)$

c) $\begin{cases} -x+2y-z = 1 \\ 2x-4y+2z = 3 \\ x+y+z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -4 & 2 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$ la

segunda ecuación es imposible (no es una igualdad $0 \neq 5$) luego el sistema no tiene solución, es incompatible.

d) $\begin{cases} 2x-3y+z = 0 \\ 3x-y = 0 \\ 4x+y-z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1+F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1-2F_2 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} 3x-y=0 \xrightarrow{1)} y=3x \\ 4x-y-z=0 \xrightarrow{2)} z=4x-y=4x-3x=x \end{cases} \quad \text{Si hacemos } x$$

$= \lambda$, tenemos la solución: $(x = \lambda, y = 3\lambda, z = \lambda)$



10 Resuelve por el método de Gauss :

$$a) \begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

---oo0oo---

$$a) \begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + F_3 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + 2F_2 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} -z = -7 \xrightarrow{1)} z = 7 \\ y + z = 13 \xrightarrow{2)} y = 13 - z = 6 \\ x + y + z = 10 \xrightarrow{3)} x = 10 - y - z = -3 \end{cases}$$

Solución: $(x = -3, y = 6, z = 7)$

$$b) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Sistema}}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \xrightarrow{4)} x = 1 - y - z - t = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ -2y - 2t = -1 \xrightarrow{3)} y = \frac{1 - 2t}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \\ z + t = 1 \xrightarrow{2)} z = 1 - t = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ -2t = 1 \xrightarrow{1)} t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: $(x = -1, y = 1, z = \frac{3}{2}, t = -\frac{1}{2})$

$$c) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \xrightarrow{2)} y = -2x - 3z = -2x \\ -7z = 0 \xrightarrow{1)} z = 0 \end{cases}$$

Si hacemos $x = \lambda$, la

solución del sistema es: $(x = \lambda, y = -2\lambda, z = 0)$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - 3F_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{Sistema}} \begin{cases} x - 3y = -1 + z \rightarrow x = -1 + z + 3y = \frac{1-z}{2} \\ 8y = 4 - 4z \rightarrow y = \frac{4-4z}{8} = \frac{1-z}{2} \end{cases} \text{ Si hacemos } z = \lambda \text{ nos queda la solución: } \left(x = \frac{1-\lambda}{2}, y = \frac{1-\lambda}{2}, z = \lambda \right)
 \end{aligned}$$



11 Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

---oo0oo---

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Compatible pero indeterminado pues dos ecuaciones (} 2^a \text{ y } 3^a \text{) que dan una única solución para la } z = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sistema}} \\
 & \begin{cases} x + y + z = 3 \xrightarrow{3)} \rightarrow z = -x - y = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3} \\ -3x - 2y = -4 \xrightarrow{2)} \rightarrow x = \frac{4-2y}{3} = \frac{2}{3} \\ -2y = -2 \xrightarrow{1)} \rightarrow y = 1 \end{cases} \text{ Compatible y determinado}
 \end{aligned}$$



PARA RESOLVER (página 46)

12 Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

---oo0oo---

a)

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 1 & -4 & -5 & | & 1 \\ -2 & 2 & 4 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{C.I.}^*} \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \xrightarrow{2)} x = 1 + 2y + 3z = 1 - 2z + 3z = 1 + z \\ -2y - 2z = 0 \xrightarrow{1)} y = -z \end{cases}$$

* Al quedar (después de escalar) dos ecuaciones y tres incógnitas.

Si hacemos $z = \lambda$, la solución es $(z = \lambda, y = -\lambda, x = 1 + \lambda)$

b)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + F_3 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & | & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + 2F_2 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -3 & -3 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{C.I.}} \begin{cases} -3x - 3y = 0 \xrightarrow{1)} x = -y \\ 4x + y - z = 0 \xrightarrow{2)} z = 4x + y = -4y + y = -3y \end{cases}$$

Si hacemos $y = \lambda$, la solución es: $(x = -\lambda, y = \lambda, z = -3\lambda)$



1 3 Estudia y resuelve estos sistemas por el método de Gauss:

a)

$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

---oo0oo---

a)

$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 4 & 2 & -1 & | & 5 \\ 2 & 4 & -7 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 + 4F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 6 & 11 & | & -3 \\ 0 & 6 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 6 & 11 & | & -3 \\ 0 & 0 & -12 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sistema C.D.}} \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \xrightarrow{3)} x = 2 + y + 3z = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 6y + 11z = -3 \xrightarrow{2)} y = \frac{-3 - 11z}{6} = -\frac{1}{2} \\ -12z = 0 \xrightarrow{1)} z = 0 \end{cases}$$

Solución: $\left(x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0 \right)$

b)
$$\begin{cases} y+z = -1 \\ x-y = 1 \\ x+2y+3z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-F_3 \\ F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2+3F_1 \\ F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.I.}} \begin{cases} y+z = -1 \xrightarrow{1)} y = -1-z \\ x+2y+3z = -2 \xrightarrow{2)} x = -2-2y-3z = -2+2+2z-3z = -z \end{cases}$$

Si hacemos $z = \lambda$, la solución es: $(x = -\lambda, y = -1-\lambda, z = \lambda)$

c)
$$\begin{cases} 5x+2y+3z = 4 \\ 2x+2y+z = 3 \\ x-2y+2z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-5F_3 \\ F_2-2F_3 \\ F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & -7 & | & 19 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-2F_2 \\ F_2 \\ F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.D.}} \begin{cases} -z = 1 \xrightarrow{1)} z = -1 \\ 6y-3z = 9 \xrightarrow{2)} y = \frac{9+3z}{6} = \frac{9-3}{6} = 1 \\ x-2y+2z = -3 \xrightarrow{3)} x = -3+2y-2z = -3+2+2 = 1 \end{cases}$$

Solución $(x = 1, y = 1, z = -1)$

d)
$$\begin{cases} x-y+3z-14t = 0 \\ 2x-2y+3z+t = 0 \\ 3x-3y+5z+6t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2-2F_1 \\ 3F_3-4F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{S.C.I.}} \begin{cases} x-y+3z-14t = 0 \xrightarrow{3)} x = y \\ -3z+29t = 0 \xrightarrow{2)} z = 0 \\ 28t = 0 \xrightarrow{1)} t = 0 \end{cases}$$

Si hacemos $y = \lambda$, la

solución es: $(x = \lambda, y = \lambda, z = 0, t = 0)$

