

❶ *Un material radiactivo se desintegra en función del tiempo, medido en días, según la función:*

$$M(t) = M_0 e^{-0.1t}$$

donde $M(t)$ es la masa, en miligramos, existente en el instante t y M_0 es la masa al inicio del proceso. Si la masa inicial es de 50 mg, calcula:

- a) La masa existente al cabo de 10 días y al cabo de 20 días.
- b) ¿Cuándo se ha desintegrado más rápidamente, en los **diez primeros días** o en los **diez siguientes**?

—oo0oo—

a) $M(10) = 50 \cdot e^{-0.1 \cdot 10} = 50 \cdot e^{-1} = \mathbf{18'393 \text{ mg}}$

$$M(20) = 50 \cdot e^{-0.1 \cdot 20} = 50 \cdot e^{-2} = \mathbf{6'767 \text{ mg}}$$

b) La velocidad de desintegración la medimos con la velocidad media de desintegración es decir la tasa de variación media :

$$TVM[0,10] = \frac{M(10)-M(0)}{10-0} = \frac{18'393-50}{10} = -3'161 \frac{\text{mg}}{\text{día}}$$

$$TVM[10,20] = \frac{M(20) - M(10)}{20-10} = \frac{6'767-18'393}{10} = -1'17 \frac{\text{mg}}{\text{día}}$$

Luego se ha desintegrado a mayor velocidad durante los diez primeros días pues su TVM es mayor en valor absoluto.

☆☆☆***@***☆☆☆

❷ *Calcula la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$, en los puntos de abscisa $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.*

—oo0oo—

La pendiente de la recta secante es la tasa de variación media en los puntos:

$$m = TVM[-1, 2] = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{8-(-1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

☆☆☆***@***☆☆☆

❸ *La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por:*

$$f(t) = 40t - t^2$$

siendo t la hora del día y $f(t)$, su distancia al origen. ¿Cuándo va más rápido el móvil, entre las 3 h y las 5 h o entre las 12 h y las 19 h?

—oo0oo—

La velocidad media se calcula mediante la TVM en cada uno de los intervalos :

$$TVM[3, 5] = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{175-111}{2} = 32$$

$$TVM[12, 19] = \frac{f(19)-f(12)}{19-12} = \frac{399-336}{7} = 9$$

El móvil va más rápido entre las 3 y las 5 horas.

☆☆☆***@***☆☆☆

❹ *Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos de abscisa indicados:*

a) $f(x) = 6x - x^2$, en $x = -1$

b) $g(x) = 1/x^2$, en $x = 1$

—oo0oo—

Para calcular las derivadas pedidas vamos a aplicar la definición:

$$a) f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(-1+h) - (-1+h)^2 - 6(-1) - (-1)^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6+6h-1-h^2+2h+6+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2+8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 8-h = 8$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - \frac{1}{1^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-(1+h)^2}{h(1+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1-2h-h^2}{h(1+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2+h)}{h(1+h)^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)}{(1+h)^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

☆☆☆***@***☆☆☆

5 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 3$, en el punto de abscisa $x = 2$.

—oo0oo—

La ecuación de la recta tangente en un punto de abscisa $x = a$ viene dada por la ecuación :

$$y - f(a) = f'(a) (x - a) \quad (1)$$

$$* f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 3 = 5.$$

$$* f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2.$$

Sustituyendo en (1) :

$$y - 5 = 2 (x - 2)$$

$$* \text{ Ec. explícita } \equiv y = 2x + 1.$$

$$* \text{ Ec. general o implícita } \equiv 2x - y + 1 = 0$$

☆☆☆***@***☆☆☆

6 Calcula, a partir de la definición, la derivada de la función constante y comprueba que es la función cero.

—oo0oo—

$$f(x) = k$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

☆☆☆***@***☆☆☆

7 Calcula, a partir de la definición, la derivada de la función $f(x) = x^n$ para $n =$

1, 2 y 3, y comprueba que se verifica $f'(x) = nx^{n-1}$.

—oo0oo—

□ Si $n = 1$ $f(x) = x$ y su derivada :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

□ Si $n = 2$ $f(x) = x^2$ y su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

□ Si $n = 3$ $f(x) = x^3$ y su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Por tanto :

$$\text{Si } f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 = 1x^{1-1}$$

$$\text{Si } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x = 2x^{2-1}$$

$$\text{Si } f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 = 3x^{3-1}$$

.....

$$\text{Si } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

☆☆☆***@***☆☆☆

8 Halla la derivada de las funciones :

a) $f(x) = 8x^9$

$$f'(x) = 8 \cdot 9 x^{9-1} = 72 x^8.$$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}} = x^{-\frac{5}{7}}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{7}x^{-\frac{5}{7}-1} = -\frac{5}{7}x^{-\frac{12}{7}} = -\frac{5}{7\sqrt[7]{x^{12}}}$$

$$d) f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} + 7x^{1-1} =$$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 7$$

$$e) f(x) = \cos x \cdot e^x = u \cdot v$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = (\cos x)' \cdot e^x + \cos x \cdot (e^x)' =$$

$$= -\sin x \cdot e^x + \cos x \cdot e^x = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$f) f(x) = 4x^3 \ln x = u \cdot v$$

$$f'(x) = (4x^3)' \ln x + 4x^3(\ln x)' = 12x^2 \ln x + 4x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 12x^2 \ln x + 4x^2 = 4x^2(3 \ln x + 1) = 4x^2(\ln x^3 + 1)$$

$$g) f(x) = (5x^6 - 3x^2)(7x^4 - 3x^2) = u \cdot v$$

$$f'(x) = (30x^5 - 6x)(7x^4 - 3x^2) + (5x^6 - 3x^2)(28x^3 - 6x) =$$

$$= 210x^9 - 90x^7 - 42x^5 + 18x^3 + 140x^9 - 30x^7 - 84x^5 + 18x^3$$

$$= 350x^9 - 120x^7 - 126x^5 + 36x^3$$

$$h) f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(6x^2 + 14x - 8)\cos x + (2x^3 + 7x^2 - 8x + 9)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$i) f(x) = \frac{4x \sin x}{3 - 4e^x} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \sin x + 4x \cos x)(3 - 4e^x) - (-4e^x)(4x \sin x)}{(3 - 4e^x)^2} =$$

$$= \frac{12 \sin x - 16 \sin x e^x + 12x \cos x - 16x \cos x e^x + 16x \sin x e^x}{(3 - 4e^x)^2}$$



9 *Aplica la regla de la cadena para derivar las funciones :*

—oo0oo—

$$a) f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 10)^3$$

$$f'(x) = 3(2x^4 - 3x^2 - 7x + 10)^2 (2x^4 - 3x^2 - 7x + 10)' = 3(2x^4 - 3x^2 - 7x + 10)^2(8x^3 - 6x - 7)$$

$$b) f(x) = \sin(x^2 + 5)$$

$$f'(x) = \cos(x^2 + 5) \cdot (x^2 + 5)' = \cos(x^2 + 5) \cdot (2x) = 2x \cos(x^2 + 5)$$

$$c) f(x) = \ln(\sin x)$$

$$f'(x) = (1 / \sin x) \cdot (\sin x)' = (1 / \sin x) \cdot \cos x = \cotg x.$$

$$d) f(x) = \cos^2(x^3 + 2x^2)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (\cos(x^3 + 2x^2))' = \\ &= 2 \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (-\sin(x^3 + 2x^2)) \cdot (x^3 + 2x^2)' = \\ &= 2 \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (-\sin(x^3 + 2x^2)) \cdot (3x^2 + 4x) = \\ &= -2x(x+4) \sin(x^3 + 2x^2) \cos(x^3 + 2x^2) = \\ &= -x(x+4) \sin(2(x^3 + 2x^2)) = -x(x+4) \sin(2x^3 + 4x^2) \end{aligned}$$



10 *Dadas una función polinómica de grado 6, determina cuál será sus derivada séptima. Pon un ejemplo concreto.*

- Si tienes un polinomio de orden n , justifica a partir de que derivada sucesiva todas las derivadas valdrán cero.

—oo0oo—

Como la derivada de la función potencial disminuye un grado el orden:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

si el polinomio es de grado 6, la primera derivado será de grado 5, la segunda de

grado 4 y así sucesivamente, de manera que la derivada de orden 7 será cero.

Ejemplo : $P(x) = 3x^6$

$$P'(x) = 18x^5$$

$$P''(x) = 90x^4$$

$$P'''(x) = 360x^3$$

$$P^{IV}(x) = 1\,080x^2$$

$$P^V(x) = 2\,160x$$

$$P^{VI}(x) = 2\,160$$

$$P^{VII}(x) = 0$$

Serán nulas a partir de la derivada n-ésima, según hemos visto en el ejemplo anterior.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

11 Determina $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ para las funciones :

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 4(x+h) - (2x^2 - 4x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4x - 4h - 2x^2 + 4x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - 4) = 4x - 4$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h) - 4 - (4x - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x + 4h - 4 - 4x + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 = 4$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

b) $f(x) = 1/x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - h}{hx(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+h)^2} - \frac{-1}{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 + x^2 + 2xh + h^2}{x^2h(x+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{x^2h(x+h)^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(x+h)^3} - \frac{2}{x^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^3 - 6x^2h - 6xh^2 - h^3}{x^3h(x+h)^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(6x^2 + 6xh + h^2)}{x^3h(x+h)^3}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-6x^2 + 6xh + h^2)}{x^3(x+h)^3} = \frac{-6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$$

☆☆☆☆☆☆☆☆

12 Dada la función $f(x) = 2e^{3x}$, calcula $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(34)}(x)$.

—oo0oo—

$$f'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 = 2 \cdot 3 e^{3x} = 6 e^{3x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 3 \cdot 3 e^{3x} = 2 \cdot 3^2 e^{3x} = 18 e^{3x}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 e^{3x} = 2 \cdot 3^3 e^{3x} = 54 e^{3x}$$

Luego inducimos que la derivada n-ésima será :

$$f^{(n)} = 2 \cdot 3^n e^{3x}$$

y por tanto :

$$f^{(34)} = 2 \cdot 3^{34} e^{3x}$$

☆☆☆☆☆☆☆☆

13 Calcula el aumento de volumen de una esfera de 1 m de radio al incrementar en 5 mm su radio.

—oo0oo—

El volumen de una esfera en función de su radio viene dado por la función :

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Si aplicamos el concepto de diferencial de una función :

$$\Delta V \cong dV = V'(r_0) h$$

En este caso :

$r_0 = 1 \text{ m}$; $h = 5 \text{ mm} = 0'005 \text{ m}$ y $V'(r) = 4 \pi r^2$ luego :

$$\Delta V = V'(1)h = 4 \pi 1^2 \cdot 0'005 = \mathbf{0'6283..}$$

Vamos a compararlo con el incremento real :

$$\Delta V = V(r_0 + h) - V(r_0) = \frac{4}{3}\pi((1'005)^3 - 1^3) =$$

$$= \mathbf{0'0631...}$$

valor muy parecido al obtenido mediante la diferencial.



14 *Calcula de forma aproximada, utilizando la diferencial de una función, el valor de $\sqrt{15'98}$.*



Sea la función :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

como $15'98 = 16 - 0'02 \Rightarrow x_0 = 16$, $h = -0'02$ y como, usando la aproximación del incremento por la diferencial :

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) \cong df = f'(x_0) \cdot h \text{ luego :}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

Como

$$f(x_0) = f(16) = \sqrt{16}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$f(x_0 + h) = 4 + \frac{1}{8} \cdot (-0'02) = 3'9975$$

que podemos comparar con el valor exacto:

$$\sqrt{15'98} = 3'9974992...$$



Resolución de ejercicios y problemas

1 *El PNB de un país entre los años 1992 y 1998 viene dado por la función :*

$$f(t) = 0'01t^2 + 0'035t + 5 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 6$$

donde el tiempo se expresa en años y el PNB en miles de millones de dólares.

Calcula la tasa media de crecimiento del PNB de dicho país en los años 1992 y 1994, entre 1994 y 1996 y entre 1996 y 1998, y determina en cuál de los períodos se produjo el mayor crecimiento medio del PNB.



Como la variable t comienza en cero:

Año 1992, $t = 0$

Año 1994, $t = 2$

Año 1996, $t = 4$

Año 1998, $t = 6$, y :

$$f(0) = 0'01 \cdot 0^2 + 0'035 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$f(2) = 0'01 \cdot 2^2 + 0'035 \cdot 2 + 5 = 5'64$$

$$f(4) = 0'01 \cdot 4^2 + 0'035 \cdot 4 + 5 = 6'36$$

$$f(6) = 0'01 \cdot 6^2 + 0'035 \cdot 6 + 5 = 7'16$$

Y las tasas medias de crecimiento:

$$TVM[0, 2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5'64-5}{2} = \frac{0'64}{2} = 0'32$$

$$TVM[2, 4] = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{6'36-5'64}{2} = \frac{0'72}{2} = 0'36$$

$$TVM[4, 6] = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{7'16-6'36}{2} = \frac{0'8}{2} = 0'4$$

Luego el mayor crecimiento medio del PNB se produjo entre 1996 y 1998.



② Halla en qué puntos las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = x^3 - 4x$ son paralelas al eje de abscisas.

—oo0oo—

Rectas paralelas son las que tiene la misma pendiente, en este caso la del eje de abscisas. Como el eje de abscisas tiene de ecuación $y = 0$ su pendiente es $m = 0$, es horizontal.

La pendiente en un punto de una función viene dada (según la interpretación geométrica de la derivada) por su derivada primera en ese punto.

Luego $f'(x_0) = m = 0$.

calculemos $f'(x) = 3x^2 - 4$, luego la ecuación a resolver es :

$$3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

conocida la abscisa, hallamos la ordenada de los puntos pedidos :

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{-2\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Los puntos buscados son :

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right) \text{ y } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

☆☆☆***@***☆☆☆

③ Averigua la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 2x + 7$, que sea paralela a la recta de ecuación $y = x + 4$.

—oo0oo—

Si ha de ser paralela a la recta de ecuación $y = x + 4$ ha de tener la misma pendiente $m = 1$ y como la pendiente es la derivada primera $y' = 3x^2 - 2 = m = 1$, ecuación que resolvemos :

$$3x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

Hay dos rectas tangentes que son paralelas a $y = x + 4$, cuyas ecuaciones hallamos mediante la ecuación punto-pendiente :

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

⊕ En $x_0 = 1$

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 7 = 6$$

$$m = 1$$

$$y - 6 = 1(x - 1) \Rightarrow \begin{cases} y = x + 5 & \text{Explícita} \\ x - y + 5 = 0 & \text{General} \end{cases}$$

⊕ En $x_0 = -1$

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 7 = 8$$

$$m = 1$$

$$y - 8 = -1(x - 1) \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 9 & \text{Explícita} \\ x + y - 9 = 0 & \text{General} \end{cases}$$

☆☆☆***@***☆☆☆

④ Utiliza las funciones de costes y de precios que aparecen en el enunciado del problema resuelto número 3 para responder.

a) Utiliza la aproximación por derivadas para calcular el CMg, el IMg y el BMg de la unidad 81.

b) Compara los resultados obtenidos en el apartado a) con los exactos.

—oo0oo—

a) El coste marginal (NMg), ingreso marginal (IMg) y el beneficio marginal (BMg), en economía, son los costes, ingresos y beneficios de producir una unidad más, que se pueden obtener de manera aproximada :

$$CMg(x+1) \approx C'(x)$$

$$IMg(x+1) \approx I'(x)$$

$$BMg(x+1) \approx B'(x)$$

Como :

$$C(x) = 0'003x^2 + 0'2x + 240$$

$$I(x) = 4'9x - 0'01 x^2$$

$B(x) = -0'013x^2 + 4'7x - 240$, tenemos las derivadas :

$$C'(x) = 0'006x + 0'2$$

$$I'(x) = 4'9 - 0'02 x$$

$$B'(x) = -0'026x + 4'7, \text{ y por tanto :}$$

$$CMg(81) \approx C'(80) = 0'006 \cdot 80 + 0'2 = \mathbf{0'68}$$

$$IMg(81) \approx I'(80) = 4'9 - 0'02 \cdot 80 = \mathbf{3'3}$$

$$BMg(81) \approx B'(80) = -0'026 \cdot 80 + 4'7 = \mathbf{2'62}$$

b) Los valores exactos son :

$$CMg(81) = C(81) - C(80) = (0'003 \cdot 81^2 + 0'2 \cdot 81 + 240) - (0'003 \cdot 80^2 + 0'2 \cdot 80 + 240) = 0'003 (81^2 - 80^2) + 0'2 \cdot 1 = \mathbf{0'683}.$$

$$IMg(81) = I(81) - I(80) = (4'9 \cdot 81 - 0'01 \cdot 81^2) - (4'9 \cdot 80 - 0'01 \cdot 80^2) = 4'9 - 0'01 (81^2 - 80^2) = \mathbf{3'29}$$

$$BMg(81) = B(81) - B(80) = (-0'013 \cdot 81^2 + 4'7 \cdot 81 - 240) - (-0'013 \cdot 80^2 + 4'7 \cdot 80 - 240) = -0'013(81^2 - 80^2) + 4'7 = \mathbf{2'607}.$$

Luego los errores relativos cometidos serán :

$$E_{CM} = \frac{|V_{ap} - V_{ex}|}{V_{ex}} \cdot 100 = \frac{|0'68 - 0'683|}{0'683} \cdot 100 = 0'4\%$$

$$E_{IM} = \frac{|3'3 - 3'29|}{3'29} \cdot 100 = 0'3\%$$

$$E_{BM} = \frac{|2'62 - 2'607|}{2'607} \cdot 100 = 0'498\%$$

☆☆☆☆***@***☆☆

5 El coste y el precio de x unidades de un producto vienen dados por las funciones:

$$C(x) = 0,02x^2 + 3x + 100 \text{ y } p(x) = 50 - 0,06x$$

a) Determina la función ingresos y la función beneficios de x unidades producidas.

b) Calcula el coste, el ingreso y el beneficio marginales de producir la unidad 102.

—oo0oo—

a) El ingreso se obtiene multiplicando las unidades vendidas (x) por el precio unitario de venta ($p(x)$) :

$$I(x) = x \cdot p(x) = x (50 - 0'06x) = 50x - 0'06 x^2$$

Los beneficios restando a los ingresos ($I(x)$) los costes ($C(x)$) :

$$B(x) = I(x) - C(x) = 50x - 0'06 x^2 - 0'02 x^2 - 3x - 100 = -0'08x^2 + 47x - 100.$$

b) Para hallar los valores marginales, vamos a utilizar las derivadas :

$$C'(x) = 0'04x + 3$$

$$I'(x) = -0'12x + 50$$

$$B'(x) = -0'16x + 47$$

$$CMg(102) = C'(101) = 0'04 \cdot 101 + 3 = 7'04$$

$$IMg(102) = I'(101) = -0'12 \cdot 101 + 50 = 37'88.$$

$$BMg(102) = B'(101) = -0'16 \cdot 101 + 47 = 30'84,$$

☆☆☆☆***@***☆☆

ACTIVIDADES

CUESTIONES

❶ ¿Es posible que la gráfica de una función derivable tenga una recta tangente horizontal en alguno de sus puntos? ¿Cuánto valdrá entonces la derivada de la función en dichos puntos?

—oo0oo—

Sí, en los máximos o mínimos relativos la recta tangente es horizontal, en el vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 3$ la recta tangente es $y = -3$.

Como son horizontales la pendiente es nula $m = 0$, y como la derivada en esos puntos de tangencia horizontal es la pendiente, la primera derivada será cero.

☆☆☆***@***☆☆☆

❷ ¿Puede ocurrir que una función tenga una tasa de variación media negativa? Justifica tu respuesta.

—oo0oo—

Sí, si la función es decreciente en el intervalo cuya tasa de variación media quiere calcularse.

Si $f(x)$ es decreciente en (x_1, x_2) h de cumplirse que si $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ y viceversa, luego:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

☆☆☆***@***☆☆☆

❸ ¿Una función continua es siempre derivable? Justifica tu respuesta.

—oo0oo—

No, puede suceder que los límites laterales sean iguales al valor de la función en un punto y por tanto continua en ese punto y sin embargo no coincidir las derivadas laterales en ese punto (punto anguloso), suele ocurrir en la funciones en valor

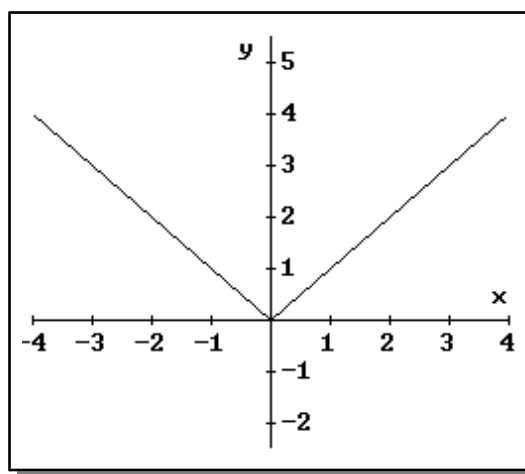
absoluto ,p.e, $f(x) = |x|$, que es continua en $x = 0$ pues :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

pero no es derivable en $x = 0$, pues :

$$f'(0^-) = (-x)' = -1 \neq f'(0^+) = (x)' = 1$$

es decir las tangentes a derecha e izquierda de $x = 0$ tiene distinta pendiente como puede verse en el gráfico siguiente



☆☆☆***@***☆☆☆

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

❹ Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 9x + 20$ en $[4, 4'01]$

$$f(4'01) = 4'01^2 - 9 \cdot 4'01 + 20 = -0'0099$$

$$f(4) = 4^2 - 9 \cdot 4 + 20 = 0$$

$$TVM[4, 4'01] = \frac{f(4'01) - f(4)}{4'01 - 4} = \frac{-0'0099 - 0}{0'01} = -0'99$$

b) $f(x) = x^3 - 1$, en $[-2, 1]$

$$f(-2) = (-2)^3 - 1 = -8 - 1 = -9$$

$$f(1) = 1^3 - 1 = 0$$

$$\text{TVM}[-2, 1] = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{0-(-9)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$, en $[-2, 0]$ y $[0, 3]$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 18 - 1 = 17$$

$$\text{TVM}[-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{TVM}[0, 3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{17-(-1)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

d) $f(x) = \ln x$, en $[1,2]$

$$f(1) = \ln 1$$

$$f(2) = \ln 2$$

$$\text{TVM}[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\ln 2 - \ln 1}{1} = \ln 2$$



5 Calcula, aplicando la definición, la derivada en $x = 2$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (2+h)^2 - 1 - (3 \cdot 2^2 - 1)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{12+12h+3h^2-1+12+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12+3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 12+3h =$$

$$= 12$$

b) $g(x) = x^2 - x$

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - (2+h) - 4 + 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2-2-h-4+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3+h$$



6 Halla el valor de la derivada de:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

en $x = 0$ y explica los pasos efectuados.

---oo0oo---

Aplicamos la definición:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(0+h)^2} - \sqrt{1+0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

Para resolver esta indeterminación multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h^2}-1)(\sqrt{1+h^2}+1)}{h(\sqrt{1+h^2}+1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2-1}{h(\sqrt{1+h^2}+1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h(\sqrt{1+h^2}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{1+h^2}+1} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$



7 Dada la función $f(x) = \ln(x + b)$,
halla:

a) El valor de $\mathbf{b}$ para que la tasa de variación media de f en el intervalo $[0, 2]$ sea $\ln 2$.

b) La tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo.

---oo0oo---

$$\text{a) TVM}[0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\ln(2+b)-\ln(0+b)}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{2+b}{b}$$

como debe ser igual a $\ln 2$:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{2+b}{b} = \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{2+b}{b} = 2 \ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$$

y por tanto, tomando antilogaritmos:

$$\frac{2+b}{b} = 4 \Rightarrow 2+b = 4b \Rightarrow 3b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$$

b) La de variación instantánea es la derivada en esos puntos :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(0+h+\frac{2}{3})-\ln(0+\frac{2}{3})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{h+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{3h+2}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(\frac{3h+2}{2} \right)^{\frac{1}{h}} = \\ &= \ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3h+2}{2} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln 1^\infty \text{ ind. pues:} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h+2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para resolver esta indeterminación aplicamos la fórmula :

$$\begin{aligned} \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3h+2}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{h}} &= \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{2} \cdot \frac{1}{h}} = \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2}} = \ln e^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Calculemos ahora la derivada en el límite superior :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(2+h+\frac{2}{3})-\ln(2+\frac{2}{3})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln 1^\infty \text{ ind.} \end{aligned}$$

ya que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = 1 \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \infty$$

Resolvemos la indeterminación como en el caso anterior :

$$f'(2) = \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{h}} = \ln e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{8h}} = \ln e^{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$$

☆☆☆***@***☆☆☆

8 Averigua el ángulo que forman la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (1, 2)$ y el eje de abscisas, sabiendo que $f'(1) = 4$.

—oo0oo—

La derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la función

en ese punto, es decir la tangente del ángulo :

$$f'(1) = m = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(1) = 4 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 4 = \mathbf{75^\circ 57' 46''}$$

☆☆☆***@***☆☆☆

9 Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, averigua el valor de la derivada en los puntos de abscisas $x = -2$, $x = 2$ y $x = 10$.

—oo0oo—

Hallamos la derivada :

$$f'(x) = 2x - 7$$

Y ahora los valores de la derivada en los puntos pedidos :

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 7 = \mathbf{-11}$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 7 = \mathbf{-3}$$

$$f'(10) = 2 \cdot 10 - 7 = 20 - 7 = \mathbf{13}$$

☆☆☆***@***☆☆☆