## Resolución de ejercicios y problemas

❶ Las puntuaciones obtenidas por 30 hombres y 30 mujeres en cierto test de personalidad fueron las que se muestran a continuación . ¿ Se puede aceptar, con nivel de significación del 3 %, que no hay diferencia entre las puntuaciones medias obtenidas por hombres y mujeres en ese tipo de test ?

**Hombres:** 64, 91, 44, 90, 12, 7, 28, 9, 92, 20, 41, 19, 68, 4, 56, 99, 80, 5, 73, 73, 81, 99, 22, 38, 92, 94, 38, 77, 8, 24

**Mujeres:** 29, 97, 38, 90, 24, 47, 99, 71, 2, 92, 71, 47, 90, 7, 44, 28, 12, 90, 85, 47, 79, 68, 34, 38, 53, 61, 7, 79, 9, 44

---oo0oo---

En primer lugar, hallamos, mediante la calculadora las medias y cuasivarianza de las muestras de hombres y mujeres :

$$\bar{x}_h = 51'6,\ (s_{n-1}{}^2)_h = 33'61^2 \quad \bar{x}_m = 52'73...\ \ (s_{n-1}{}^2)_m = 30'2654^2$$

Si llamamos A = mujeres y B = hombres, se tiene :

① **Planteamiento del contraste**

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu_A = \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B = 0$
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu_A \neq \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B \neq 0$ ( Contraste bilateral )

② **Características de la distribución**

- **Distribución muestral** : de diferencia de medias.
- **Media**: $\mu(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_A - \mu_B = 0$.
- **Desviación típica** :

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{30'2654^2}{30}+\frac{33'61^2}{30}} = 8'2576$$

- **Tipo** : N ( 0, 8'2576 ), ya que $n_A$ y $n_B$ = 30.

③ **Región crítica**

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y el nivel de significación ( $\alpha$ = 0'03), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$$(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Como $\alpha = 0'03 \Rightarrow \alpha/2 = 0'015 \Rightarrow z_{0'985} = 2'17$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv (-\infty, -2'17) \cup (2'17, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

④ **Estadístico de contraste**[1]

$$z_c = \frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(52'7\bar{3}-51'6)-0}{8'2576} = 0'137$$

[1] *A partir de ahora para realizar el contraste sólo usaremos el estadístico de contraste, pues al fin y al cabo el estadístico muestral es redundante.*

⑤ **Decisión**

Como $z_c$ = 0'137 $\notin$ $S_1 \equiv ( -\infty , -2'17 ) \cup ( 2'17, +\infty)$ decidimos **aceptar la hipótesis nula ($H_0$), no existe diferencia entre la puntuaciones medias de las mujeres y los hombres en la población,** con un riesgo de equivocarnos del 1 % , las diferencias observadas en las muestras son debidas al azar y el proceso de elección..

❷ Un fabricante envasa bolsas de frutos secos y garantiza un contenido medio mínimo de 170 g. En un control de calidad se escogen 49 bolsas y se observa el peso medio $\bar{X}$. Si la desviación típica poblacional es de 14 g, ¿ qué valores de $\bar{X}$ indicarán fraude, con nivel de significación 0,05 ?

---oo0oo---

Población $\sigma$ =14 g, Muestra : n = 49

① **Planteamiento del contraste**

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu \geq 170$ gr
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu < 170$ gr ( Contraste unilateral izquierdo )

② **Características de la distribución**

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = 170$ gr .
- **Desviación típica** :

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = 2$$

- **Tipo** : N ( 170, 2 ) ya que n = 49 $\geq$ 30.

③ **Región crítica**

Viene definida por el tipo de contraste ( izquierdo ) y el nivel de significación ( $\alpha$ = 0'05), como es un contraste unilateral izquierdo la región crítica está a la izquierda de la distribución:

$$(-\infty, -z_{\alpha}) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Como $\alpha$ = 0'05 $\Rightarrow$ $z_{0'95}$ = 1'65. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv ( -\infty, -1'65)$ para el estadístico de contraste z.

④ **Estadístico de contraste**

$$z_c = \frac{\bar{X}-\mu(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} = \frac{\bar{X}-170}{2} \text{ que ha de ser menor de } -z_{\alpha} \text{ para rechazar } H_0$$

luego : $\frac{\bar{x}-170}{2} < -1'65 \Leftrightarrow \bar{x} - 170 < -3'3 \Leftrightarrow \bar{x} < 170 - 3'3 \Leftrightarrow \bar{x} < 166'7$ gr

**Si al tomar la muestra obtenemos un peso medio inferior a 166'7 gr es de esperar ( con un 5 % de equivocarnos) que nos quieran defraudar.**

❸ Partimos de una población con media $\mu$ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$. Sabiendo que en una muestra de tamaño 400 se ha observado una media $\bar{x} = 7{,}6$, determina:

a) Para qué valores de $\mu_0$ será aceptable, con un nivel de significación del 1 %, la hipótesis Ho: $\mu = \mu$, contra $H_1$ : $\mu \neq \mu_0$ .

b) El intervalo de confianza para $\mu$ con un nivel de confianza del 99%.

---oo0oo---

**a)**

① **Planteamiento del contraste**

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu = \mu_o$
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu \neq \mu_o$ ( Contraste bilateral )

② **Características de la distribución**

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = \mu_o$ .
- **Desviación típica** : $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{400}} = 0'25$
- **Tipo** : N ($\mu_o$, 0'25 ), ya que n = 400 ≥ 30.

③ **Región crítica**

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y el nivel de significación ( $\alpha$ = 0'01), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$$(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Como $\alpha$ = 0'01⇒ $\alpha$/2 = 0'005⇒ $z_{0'995}$ = 2'58. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv$ ( - ∞ , - 1'65 ) ∪ ( 1'65, + ∞) para el estadístico de contraste z.

④ **Estadístico de contraste**

$$z_c = \frac{\bar{x}-\mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = \frac{7'6-\mu_0}{0'25}$$

⑤ **Toma de decisión**

Para aceptar la hipótesis nula el estadístico de contraste ha de pertenecer al la región de aceptación : $S_0$ : [ - 2'58, 2'58 ] , luego [ - 2'58≤ $z_c$ ≤ 2'58 ], es decir:

$$\left[-2'58 \le \frac{7'6-\mu_0}{0'25} \le 2'58\right] \Leftrightarrow [-0'645 \le 7'6-\mu_0 \le 0'645] \Leftrightarrow [-8'245 \le -\mu_0 \le -6'955] \Leftrightarrow$$

cambiando el signo y el sentido de las desigualdades:

$$[6'955 \le \mu_0 \le 8'245]$$

**b)** El intervalo de confianza para un nivel del 99 % ( nivel de riesgo 1%):

$$\left[\bar{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma(\bar{x})\right] = [7'6 \mp 2'58 \cdot 0'25] = [7'6 \mp 0'645] \Leftrightarrow [6'955, 8'245]$$

Como habíamos obtenido en el apartado a).

◈◈▣▣▣◉▣▣▣◈◈◈

❹ Partimos de dos poblaciones N ( $\mu_1$ , 2) y N ( $\mu_2$ , 5) con $\mu_1$ y $\mu_2$ desconocidas. Sabiendo que en una muestra de tamaño 64 de la primera se ha observado una media $\bar{x}_1$ = 12,3, y en una de tamaño 50 de la segunda, una media $\bar{x}_2$ = 8,9, determina:

a) Para qué valores de $\lambda_0$ será aceptable la hipótesis Ho: $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ contra $H_1$ : $\mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$ , con un nivel de significación del 10 %.

b) El intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ con un nivel de significación del 10%.

---oo0oo---

**a)**

① **Planteamiento del contraste**

- **Hipótesis nula: $H_0$** ≡ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ .
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** ≡ $\mu_A - \mu_B \neq \lambda_0$ ( Contraste bilateral )

② **Características de la distribución**

- **Distribución muestral** : de diferencia de medias.
- **Media**: $\mu(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$.
- **Desviación típica** :

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{2^2}{64}+\frac{5^2}{50}} = 0'75$$

- **Tipo** : N ($\lambda_0$, 0'75 ), ya que $n_A$ y $n_B \ge 30$.

③ **Región crítica**

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y el nivel de significación ( $\alpha$ = 0'1), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$ para el estadístico de contraste

Como $\alpha = 0'1 \Rightarrow \alpha/2 = 0'05 \Rightarrow z_{0'95} = 1'65$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv ( - \infty , - 1'65 ) \cup ( 1'65, + \infty)$ para el estadístico de contraste z.

④ **Estadístico de contraste**

$$z_c = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(12'3 - 8'9) - \lambda_0}{0'75} = \frac{3'4 - \lambda_0}{0'75}$$

⑤ **Decisión**

Para que aceptemos la hipótesis nula ($H_0$), el estadístico de contraste $z_c$ ha de pertenecer a la región de aceptación : $[-1'65 \le z_c \le 1'65]$, es decir :

$$\left[-1'65 \le \frac{3'4 - \lambda_0}{0'75} \le 1'65\right] \Leftrightarrow [-1'2375 \le 3'4 - \lambda_0 \le 1'2375] \Leftrightarrow [2'1625 \le \lambda_0 \le 4'6375]$$

b) Como hemos comprobado en el ejercicio anterior es el mismo :

$$[2'1625 \le \lambda_0 \le 4'6375]$$

## Actividades

### CUESTIONES

❶ Pon tres ejemplos de decisión estadística y, en cada uno de ellos, indica cuál es la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

---oo0oo---

① El capataz de una fábrica sospecha que una determinada tarea puede hacerse en un máximo de 15 minutos

$H_0 \equiv \mu \le 25$ min
$H_1 \equiv \mu < 15$ min

② Se sospecha que el nivel de basicidad de un agua residual es 7.

$H_0 \equiv \mu = 7$
$H_1 \equiv \mu \ne 7$

③ Se supone que los chicos de un centro son más aficionados al fútbol que las chicas.

$H_0 \equiv P = 0'5$
$H_1 \equiv P \ne 0'5$

❷ Explica qué es un test de hipótesis y para qué se utiliza.

---oo0oo---

Es un procedimiento de la Inferencia Estadística para contrastar si las hipótesis formuladas para la población, pueden mantenerse a la luz de los estadísticos muestrales que sirven para contrastarlas.

❸ Explica en qué consisten los errores de tipo I y de tipo II en un test de hipótesis.

---oo0oo---

☠ **Error tipo I** : Se comete si se rechaza la hipótesis nula siendo verdadera, la probabilidad de que ocurra es el nivel de significación ( $\alpha$ )

☠ **Error tipo II** :Se incurre en él si decidimos aceptar la hipótesis nula siendo falsa, su probabilidad es ( $\beta$) , su complementario mide la potencia de la prueba.

❹ Di qué criterios suelen seguirse para diseñar un buen test de hipótesis.

---oo0oo---

Los más importante es que sus riesgos sean lo menor posible :

❄ Si fija una cota al **error de tipo I** ( fijamos $\alpha$ ), para elegir, después, el tipo de contraste que ( con esa cota) hace mínimo el **error tipo II**.

❄ Se selecciona un tamaño de muestra lo mayor posible que haga aumentar la fiabilidad del contraste.

❺ ¿ Qué es el nivel de significación de un test de hipótesis ? ¿ Y la potencia ?

---oo0oo---

❍ **Nivel de significación** ( $\alpha$ ) : la probabilidad de cometer un error tipo y, es decir de rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.

❍ **Potencia de la prueba** ( $1 - \beta$ ) : La probabilidad de NO cometer un error tipo II, es decir la probabilidad de no aceptar la hipótesis nula siendo falsa, mide la fiabilidad del contraste o prueba.

❻ Un laboratorio quiere lanzar al mercado un nuevo insecticida, pero antes debe estudiar si éste es nocivo o no para los seres humanos.

Consideramos los dos planteamientos siguientes:

a) Ho: Es nocivo
$H_1$ : Es inocuo

b) Ho: Es inocuo
$H_1$ : Es nocivo

Explica, en cada caso, en qué consisten los errores de tipo I y de tipo II, y justifica cuál de ellos puede tener peores consecuencias.

- Deduce cuál de los dos planteamientos es más adecuado.

---oo0oo---

**a)**

☹ **Error tipo I** : Rechazar que es nocivo ( aceptar que es inocuo), siéndolo
☹ **Error tipo II** : Aceptar que es nocivo siendo inocuo.

Es evidente que la decisión de peores consecuencias es la que conlleva el primer tipo de error.

**b)**

☹ **Error tipo I** : Rechazar que es inocuo ( aceptar que es nocivo), siendo inocuo
☹ **Error tipo II** : Aceptar que es inocuo siendo nocivo.

Es evidente que la decisión de peores consecuencias es la que conlleva el segundo tipo de error.

Como el error de peores consecuencias ha de ser el de tipo I ( que es el que podemos fijar de antemano, al riesgo que deseemos correr ), el planteamiento más adecuado sería el del apartado **a**)

❼ Explica qué son la región de aceptación y la región crítica en un test de hipótesis. ¿ Pueden tener intersección no vacía ? ¿ Por qué ?

---oo0oo---

☺ **Región de aceptación** : El intervalo de valores que puede tomar el estadístico de contraste ( o del estadístico muestral ) para aceptar la hipótesis nula.

☹ **Región de rechazo** : Intervalo o conjunto de valores a que ha de pertenecer el estadístico de contraste para rechazar la hipótesis nula.

Como son complementarias su intersección siempre es nula.

❽ Explica la diferencia entre un test unilateral y un test bilateral.

---oo0oo---

Véase el ejercicio Nº ❸ de la página 2, en esta unidad.

⁂ **Contraste unilateral** ( derecho o izquierdo) es aquel cuya región crítica o de rechazo ( de la hipótesis nula) ( $S_1$) se encuentra a un lado (derecho o izquierdo ) de la función de distribución de probabilidad. Se le conoce también por “ de una cola “

⁂ **Contraste** bilateral es aquel en que la región crítica o de rechazo( $S_1$ ) ( de la hipótesis nula) se distribuye ( al 50 %) en los dos extremos de la distribución, se le llama también de “dos colas”.

❾ Si el valor del estadístico de contraste en un test de hipótesis es - 1’7, razona si aceptaremos o no Ho en los siguientes casos:

a) La región de aceptación es ( - ∞ , - 1’8)

b) La región crítica es (- 1,6, +∞ ).

---oo0oo---

**a)** Como $z_c$ = - 1’7 ∉ $S_0$ ≡ ( - ∞ , - 1’8), que es la región de aceptación ( $S_0$ ) rechazamos la hipótesis nula ( $H_0$ ).

**b)** Como $z_c$ = - 1’7∉ $S_1$ ≡ (- 1,6, +∞ ). que es la región crítica o de rechazo ( $S_1$ ) aceptamos la hipótesis nula ( $H_0$ ).

❿ Cita los estadísticos de contraste que se utilizan en los tests de hipótesis relativos a la media y a la proporción vistos en esta unidad. Justifica en qué condiciones dichos tests de hipótesis están basados en la distribución normal.

---oo0oo---

☒ Contrastes basados en la media :

⊗ El $z_c = \frac{\bar{x}-\mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})}$ en donde $\left\{ \begin{array}{c} \bar{x} = \text{media muestral} \\ \mu(\bar{x}) = \text{media de la distribución muestral} \\ \sigma(\bar{x}) = \text{d. típica de la distribución muestral} \end{array} \right\}$

⊗ La media de la muestra $\bar{x}$

☒ Contrastes basados en proporciones:

⊗ El

$z_c = \frac{p-\mu(p)}{\sigma(p)}$ en donde $\left\{ \begin{array}{c} p = \text{proporción muestral} \\ \mu(p) = \text{media de la distribución muestral} \\ \sigma(p) = \text{d. típica de la distribución muestral} \end{array} \right\}$

⊗ La proporción de la muestra p.

Ambos contrastes se basan en el teorema central del límite, que nos permite decir que **las distribuciones muestrales se pueden aproximar a la normal siempre que el tamaño sea como mínimo de 30 individuos**.

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

**❶❶** El tiempo en minutos invertido por los trabajadores de una localidad en desplazarse desde su domicilio hasta su centro de trabajo sigue una distribución N ( $\mu$, 20). Si en una muestra de 100 trabajadores de esa localidad se observó un tiempo medio de 39 minutos, ¿se puede aceptar, con nivel de significación del 10 %, que $\mu = 35$ ? ¿ Y con nivel de significación del 1 % ?

---oo0oo---

Población : $\sigma = 20$, Muestra : $n = 100$, $\bar{x} = 39$ min.

### ① Planteamiento del contraste

- **Hipótesis nula:** $H_0 \equiv \mu = 35$ min
- **Hipótesis alternativa:** $H_1 \equiv \mu \neq 35$ min ( Contraste bilateral )

### ② Características de la distribución

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = 35$ min.
- **Desviación típica** : $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$
- **Tipo** : N ( 35, 2 ), ya que $n = 100 \geq 30$.

### ③ Región crítica

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y los niveles de significación ( $\alpha = 0'1$ y $\alpha = 0'01$), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$$(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

☑ Para $\alpha = 0'1 \Rightarrow \alpha/2 = 0'05 \Rightarrow z_{0'95} = 1'65$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv ( -\infty , -1'65 ) \cup ( 1'65, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

☑ Para $\alpha = 0'01 \Rightarrow \alpha/2 = 0'005 \Rightarrow z_{0'995} = 2'58$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv ( -\infty , -2'58 ) \cup ( 2'58, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

④ **Estadístico de contraste**

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = \frac{39-35}{2} = 2$$

⑤ **Toma de decisión**

❄ Como $z_c = 2 \in S_1 \equiv (-\infty, -1'65) \cup (1'65, +\infty)$ decidimos **rechazar la hipótesis nula ($H_0$) de que el tiempo de desplazamiento medio de todas los trabajadores es de $\mu = 35$ min**, si queremos afrontar un riesgo de equivocarnos del 10 % .

❄ Como $z_c = 2 \notin S_1 \equiv (-\infty, -2'85) \cup (2'85, +\infty)$ decidimos **aceptar la hipótesis nula ($H_0$) de que el tiempo de desplazamiento medio de todas los trabajadores es de $\mu = 35$ min**, si afrontamos un riesgo de equivocarnos del 1 %, menor.

◈◈▣▣▣◉▣▣▣◈◈◈

❶❷ Se sabe que el contenido de ciertos botes de conserva sigue una distribución con desviación típica de 25 g. Si, examinados 500 de esos botes, se observó un contenido medio de 998 g, ¿ se puede aceptar, con nivel de significación 0,05, que el contenido medio de los botes es de 1 kg ?

**---oo0oo---**

Población : $\sigma = 25$ gr, Muestra : $n = 500$, $\bar{x} = 998$ gr.

① **Planteamiento del contraste**

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu = 1\,000$ gr.
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu \neq 1\,000$ gr. ( Contraste bilateral )

② **Características de la distribución**

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = 1\,000$ gr (suponemos).
- **Desviación típica** : $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{500}} = 1'118$
- **Tipo** : N ( 1 000, 1'118 ), ya que $n = 500 \geq 30$.

③ **Región crítica**

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y el nivele de significación ( $\alpha = 0'05$ ), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$$(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Para $\alpha = 0'05 \Rightarrow \alpha/2 = 0'025 \Rightarrow z_{0'975} = 1'96$. y por tanto la región crítica :
$S_1 \equiv (-\infty, -1'96) \cup (1'96, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

### ④ Estadístico de contraste

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = \frac{998 - 1000}{1'118} = -1'79$$

### ⑤ Toma de decisión

❄ Como $z_c = -1'79 \notin S_1 \equiv (-\infty, -1'96) \cup (1'96, +\infty)$ decidimos **aceptar la hipótesis nula ($H_0$) de que el peso medio de todas los botes de conserva es de $\mu$ = 1 kg** , si queremos afrontar un riesgo de equivocarnos del 5 % .

◈◈▣▣▣◉▣▣▣◈◈◈

❶❸ Examinado el peso en gramos de 40 naranjas de una cosecha, se obtuvieron los siguientes datos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 144 | 150 | 158 | 146 | 149 | 152 | 148 | 147 | 145 | 159 |
| 152 | 153 | 160 | 156 | 135 | 142 | 161 | 141 | 143 | 154 |
| 138 | 151 | 147 | 155 | 149 | 152 | 157 | 148 | 163 | 153 |
| 149 | 162 | 146 | 138 | 145 | 148 | 159 | 152 | 154 | 160 |

¿ Se puede aceptar, con nivel de significación del 2 %, que el peso medio de las naranjas de esa cosecha es de 156 g ?

---oo0oo---

Con la calculadora hallamos la media y cuasivarianza de la muestra :

$$\boxed{\bar{x} = 150'525,\ s_{n-1} = 6'9503}$$

### ① Planteamiento del contraste

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu = 156$ gr.
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu \neq 156$ gr. ( Contraste bilateral )

### ② Características de la distribución

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = 156$ gr (suponemos).
- **Desviación típica** : como no poseemos la desviación típica poblacional, la estimamos a partir de la poblacional :

$$\sigma \simeq \hat{\sigma} = \sqrt{s_{n-1}^2} = 6'9503$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6'9503}{\sqrt{40}} = 1'09893$$

⌖**Tipo** : N ( 156, 1'09893 ), ya que n = 40 ≥ 30.

### ③ Región crítica

Viene definida por el tipo de contraste ( bilateral ) y el nivel de significación ( $\alpha$ = 0'02 ), como es un contraste bilateral la región crítica se distribuye a ambos lados de la distribución:

$$(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Para $\alpha$ = 0'02 ⇒ $\alpha$/2 = 0'01⇒ $z_{0'99}$ = 2'33. y por tanto la región crítica :
$S_1$ ≡ ( - ∞ , - 2'33 ) ∪ ( 3'33, + ∞) para el estadístico de contraste z.

### ④ Estadístico de contraste

$$z_c = \frac{\bar{X}-\mu(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} = \frac{150'525-156}{1'09893} = -4'982$$

### ⑤ Decisión

❄ Como $z_c$ = - 4'982 ∉ $S_1$ ≡ ( - ∞ , - 2'33 ) ∪ ( 2'33, + ∞) decidimos **rechazar la hipótesis nula ($H_0$) de que el peso medio de todas las naranjas de la cosecha es de $\mu$ = 156 gr** , si queremos afrontar un riesgo de equivocarnos del 2 % .

❶❹ Para estudiar el contenido de azúcar de ciertos dulces, se tomó una muestra de 100 de ellos. Si se observó un contenido medio de azúcar de 10 g, y una desviación típica muestral de 1 g, ¿ se puede aceptar, con nivel de significación del 3%, que el contenido medio de azúcar de esos dulces no supera los 9,5 g ?

---oo0oo---

Muestra : n = 100, $\bar{x}$ = 10 gr, s = 1 gr.

### ① Planteamiento del contraste

⌖ **Hipótesis nula: $H_0$** ≡ $\mu$ ≤ 9'5 gr
⌖ **Hipótesis alternativa: $H_1$** ≡ $\mu$ > 9'5 gr ( Contraste unilateral derecho )

### ② Características de la distribución

⌖ **Distribución muestral** : de medias
⌖**Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu =$ 9'5 gr.
⌖**Desviación típica** : como no conocemos la desviación típica de la población la estimamos a partir de la de la muestra :

$$\sigma \approx \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s = \sqrt{\frac{100}{99}} \cdot 1 = 1'005 \Rightarrow \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1'005}{\sqrt{100}} = 0'1005$$

⌖ **Tipo** : N ( 9'5, 0'1005 ) ya que n = 100 ≥ 30.

### ③ Región crítica

Viene definida por el tipo de contraste ( derecho ) y el nivel de significación ( α = 0'03), como es un contraste unilateral derecho la región crítica está a la derecha de la distribución:

$$(z_\alpha, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Como α = 0'03⇒ $z_{0'97}$ = 1'88. y por tanto la región crítica :

■ $S_1$ ≡ ( 1'88, + ∞) para el estadístico de contraste z.

### ④ Estadístico de contraste

$$z_c = \frac{\bar{x}-\mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = \frac{10-9'5}{0'1005} = 4'97$$

### ⑤ Toma de decisión

Como $z_c$ = 4'97 ∈ $S_1$ ≡ ( 1'88, + ∞) decidimos **rechazar la hipótesis nula ($H_0$) de que el contenido medio de azúcar de los dulces μ ≤ 9'5 gr** , con un riesgo de equivocarnos del 3 % .

◈◈▣▣▣◉▣▣▣◈◈◈

❶❺ El cociente intelectual de los alumnos de un centro escolar sigue una distribución N (μ , 15). Si en una muestra de 25 alumnos de ese centro se observó un coeficiente intelectual medio de 103 puntos, ¿ se puede aceptar, con nivel de significación del 5%, que el cociente intelectual medio de todos los alumnos del centro es de, al menos, 105 puntos ?

**---oo0oo---**

Población N( μ,15) Muestra : n = 25, $\bar{x}$ = 103

### ① Planteamiento del contraste

⌖ **Hipótesis nula: $H_0$** ≡ μ ≥ 105
⌖ **Hipótesis alternativa: $H_1$** ≡ μ < 105 ( Contraste unilateral izquierdo )

### ② Características de la distribución

⌖ **Distribución muestral** : de medias
⌖ **Media**: μ( $\bar{x}$ ) = μ = 105 .

**Desviación típica** :

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$$

**Tipo** : N( 125, 2'121 ) ya que aunque n = 25 < 30, la población sí es Normal.

### ③ Región crítica

Viene definida por el tipo de contraste ( izquierdo ) y el nivel de significación ( α = 0'05), como es un contraste unilateral izquierdo la región crítica está a la izquierda de la distribución:

$$(-\infty, -z_{\alpha}) \text{ para el estadístico de contraste}$$

Como α = 0'05 ⇒ $z_{0'95}$ = 1'65. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv$ ( - ∞, -1'65) para el estadístico de contraste z.

### ④ Estadístico de contraste

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} = \frac{103-105}{3} = -0'\hat{6}$$

### ⑤ Toma de decisión

Como $z_c$ = - 0'6... ∉ $S_1 \equiv$ ( - ∞, - 1'65) decidimos **aceptar la hipótesis nula ($H_0$)** , con un riesgo de equivocarnos del 5 % .

◈◈▣▣▣◉▣▣▣◈◈◈

**❶❻** Cierto restaurante reparte comidas a domicilio y asegura en su publicidad que los pedidos llegan en un tiempo medio no superior a 30 minutos. Para comprobar si es cierta esta propaganda, se observa el tiempo medio en minutos que tardan 32 pedidos en llegar al domicilio y se recogen los siguientes datos:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 28 | 29 | 25 | 34 | 32 | 38 | 29 |
| 40 | 45 | 28 | 26 | 32 | 29 | 30 | 24 |
| 30 | 39 | 23 | 26 | 24 | 36 | 42 | 35 |
| 24 | 40 | 30 | 28 | 37 | 32 | 35 | 37 |

¿ Se puede creer, con un nivel de significación del 10%, la publicidad del restaurante ? ¿ Y con nivel de significación del 1 % ?

**---oo0oo---**

Con la calculadora hallamos la media y cuasivarianza de la muestra :

$\bar{x}$ = 31'719 min, $s_{n-1}$ = 5'8598 min

## ① Planteamiento del contraste

- **Hipótesis nula: $H_0$** $\equiv \mu \le 30$ min
- **Hipótesis alternativa: $H_1$** $\equiv \mu > 30$ min ( Contraste unilateral derecho )

## ② Características de la distribución

- **Distribución muestral** : de medias
- **Media**: $\mu(\bar{x}) = \mu = 30$ min.
- **Desviación típica** : como no conocemos la desviación típica de la población la estimamos a partir de la cuasivarianza de la muestra hallada con la calculadora :

$$\sigma \approx \hat{\sigma} = s_{n-1} = 5'8598 \Rightarrow \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5'8598}{\sqrt{32}} = 1'0359$$

- **Tipo** : N ( 30, 1'0359 ) ya que n = 32 ≥ 30.

## ③ Regiones críticas

Vienen definida por el tipo de contraste ( derecho ) y el nivel de significación ( α ), como es un contraste unilateral derecho la región crítica está a la derecha de la distribución:

$$(z_{\alpha}, +\infty) \text{ para el estadístico de contraste}$$

❈ Para $\alpha = 0'1 \Rightarrow z_{0'9} = 1'28$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv (1'28, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

❈ Para $\alpha = 0'01 \Rightarrow z_{0'99} = 2'33$. y por tanto la región crítica :

■ $S_1 \equiv (2'33, +\infty)$ para el estadístico de contraste z.

## ④ Estadístico de contraste

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = \frac{31'719 - 30}{1'0359} = 1'6594$$

## ⑤ Toma de decisión

❈ Como $z_c = 1'6594 \in S_1 \equiv (1'28, +\infty)$ decidimos **rechazar la hipótesis nula ($H_0$) de que el C.I. medio supera los 30 puntos**, con un riesgo de equivocarnos del 10 % .

❈ Como $z_c = 1'6594 \notin S_1 \equiv (2'33, +\infty)$ decidimos **aceptar la hipótesis nula ($H_0$) de que el C.I. medio supera los 30 puntos**, con un riesgo de equivocarnos del 1 % .